Физические бои 2024
Задачи и решения

Томск

Физические бои 2024

Задачи и решения

Жлудько Н. В., Заря Н. К., Королев П. С., Куликова А. В., Рякин В. А., Синельников Н. А., Щербатов Д. Я.

Корректор: Синицына Е. А.

Томск – 2025

Оглавление

24 ноября 2024 года **2**

1 Отборочный тур старших лиг 2

2 Отборочный тур младших лиг 12

7 декабря 2024 года **17**

3 Старшая высшая лига 17

4 Старшая первая лига 36

5 Старшая вторая лига 46

8 декабря 2024 года **51**

6 Старшая высшая лига. Финал 51

7 Старшая высшая лига. Бой за 3 место 64

8 Старшая первая лига 69

9 Старшая вторая лига 76

14 декабря 2024 года **79**

10 Младшая высшая лига 79

11 Младшая первая лига 88

15 декабря 2024 года **93**

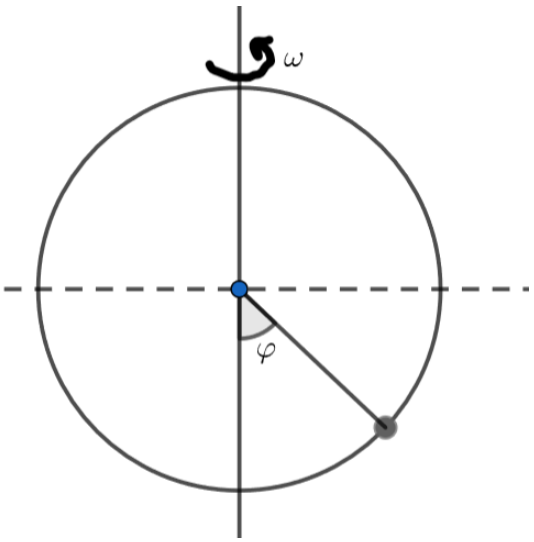
12 Младшая высшая лига. Финал 93

13 Младшая высшая лига. Бой за 3 место 106

14 Младшая первая лига 114

24 ноября 2024 года

1 Отборочный тур старших лиг

1. 

Незнайка вместе с друзьями собрал сферическую юлу из прозрачного материала, внутри которой находится маленький шарик. Когда Незнайка раскручивает юлу, шарик отклоняется от положения равновесия на некоторый угол φ, как показано на рисунке. Помогите Незнайке вычислить, с какой угловой скоростью нужно раскрутить юлу, чтобы шарик отклонился на $90°$. Радиус юлы $R = 0{,}1$ м и коэффициент трения между шариком и её поверхностью $\mu = 0{,}2$.

Решение

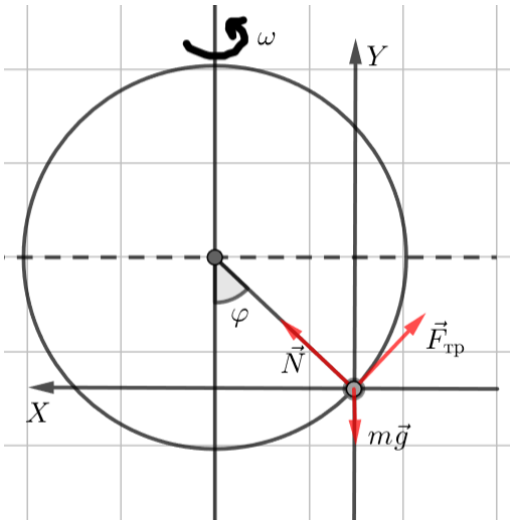


Рис. 1: Силы, действующие на шарик

Запишем условие равновесия шарика при угле отклонения φ в проекции на вертикальную ось OY и горизонтальную ось OX:

$$OX : N\sin\varphi - F_{\text{тр}}\cos\varphi = mw^2R\sin\varphi\,,$$
$$OY : N\cos\varphi - mg + F_{\text{тр}}\sin\varphi = 0\,.$$

Подставляя туда условия $\varphi = \pi/2$ и $F_{\text{тр}} = \mu N$, получаем

$$\begin{aligned}\mu N &= mg\\ N &= mw^2R\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad w = \sqrt{\frac{g}{\mu R}} \approx 22\ \text{Гц}\,.$$

Ответ: $w \approx 22$ Гц.

2. Жучок ползёт по главной оптической оси тонкой собирающей линзы со скоростью $v = 0{,}2$ см/с. Экспериментатор наблюдает за движением жучка от точки A до точки B, где $OA = 3F$, $OB = 2F$, O — оптический центр линзы, а F — её фокусное расстояние. Определите среднюю скорость изображения жучка.

Решение

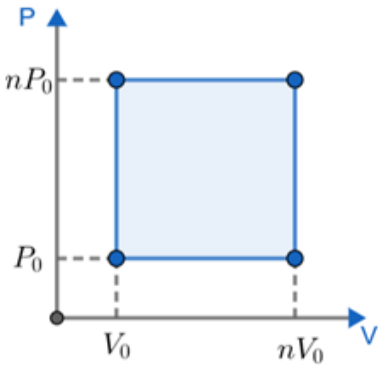
Применим формулу тонкой линзы, чтобы определить начальное и конечное положения изображения жучка f_1 и f_2:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{3F} + \frac{1}{f_1} \quad\Rightarrow\quad f_1 = \frac{3F}{2}\,,$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f_2} \quad\Rightarrow\quad f_2 = 2F\,.$$

Таким образом, изображение жучка переместилось на расстояние $F/2$, что вдвое меньше, чем путь жучка, следовательно, скорость изображения жучка равна 0,1 см/с.

Ответ: 0,1 см/с.

3. Оцените значения, которые может принять КПД цикла, указанного на рисунке, в зависимости от значения параметра n. Рабочим телом цикла является идеальный одноатомный газ.



Решение

Согласно приведённой PV-диаграмме, $n > 1$. Найдём КПД данного цикла при любом таком n. Для этого вычислим количество теплоты, полученное от нагревателя:

$$Q_{\text{н}} = \frac{3}{2}(n-1)P_0V_0 + \frac{5}{2}n(n-1)P_0V_0 = \frac{5n+3}{2}(n-1)P_0V_0,$$

и работу газа за цикл:

$$A_{\text{ц}} = (n-1)^2 P_0V_0\,.$$

Теперь вычислим и оценим КПД сверху:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{8}{5n+3}\right) < 0{,}4\,.$$

Аналогично проведём оценку снизу:

$$\eta = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{8}{5n+3}\right) > \frac{2}{5}\left(1 - \frac{8}{5+3}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$0 < \eta < 0{,}4.$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда $n \leq 1$. Выражения для работы за цикл, теплоты, полученной от нагревателя, и КПД примут вид

$$A_{\text{ц}} = (1-n)^2 P_0V_0\,,$$
$$Q_{\text{н}} = \frac{(1-n)(3n+5)}{2}P_0V_0\,,$$
$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{16}{3(3n+5)} - \frac{2}{3}\,.$$

Как и в предыдущем случае, минимальное значение КПД достигается при $n = 1$ и равно нулю. Максимальное значение КПД достигается при $n = 0$ и равно 0,4.

Ответ: $0 < \eta < 0{,}4$.

4. Наблюдая за младшей сестрой Лизой, которая купалась в бассейне и пыталась утопить свои игрушки, Соня задумалась, на какой глубине это бы получилось. Игрушка, которая привлекла её внимание, — кружка из чайного сервиза. В моменты, когда Лиза переключалась на другие игрушки, можно было увидеть, что кружка массой $m = 21$ г плавает вверх дном на поверхности воды. В кружке содержится $V_{\text{в}} = 15$ см^3 воздуха, сама кружка имеет объём $V_{\text{к}} = 7$ см^3.

Помогите Соне определить, на какой максимальной глубине h кружка ещё продолжит плавать после того, как Лиза выпустит её из рук.

Предполагаем, что температура воздуха в кружке не меняется (погружаем её достаточно медленно, чтобы температура кружки постоянно была равна температуре окружающей среды), размером кружки можно пренебречь по сравнению с h. Пренебрегаем давлением водяного пара в кружке и считаем, что начальное давление воздуха в кружке равно атмосферному, $p_0 = 100$ кПа. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

Решение

Принимая во внимание закон Бойля–Мариотта,

$$p_0 V_{\text{в}} = (p_0 + \rho g h) V_h,$$

выразим объём воздуха в кружке на глубине h:

$$V_h = \frac{p_0}{p_0 + \rho g h} V_{\text{в}}.$$

Следовательно, выталкивающая сила —

$$F_A = (V_{\text{к}} + V_h)\rho g.$$

Максимальная глубина, на которую можно погрузить кружку, чтобы та продолжила плавать, достигается, когда выталкивающая сила равна силе тяжести:

$$mg = (V_{\text{к}} + V_h)\rho g,$$

или

$$m = \left(V_{\text{к}} + \frac{1}{1 + \dfrac{\rho g}{p_0} h} V_{\text{в}} \right) \rho.$$

Откуда получаем

$$h = \frac{p_0}{g} \left(\frac{V_{\text{в}}}{m - \rho V_{\text{к}}} - \frac{1}{\rho} \right).$$

Подставляя, получим $h = 0{,}728$ м.

Ответ: $h = 0{,}728$ м.

5. Современные истребители могут развивать скорость вплоть до $v = 3500$ км/ч при скорости звука $c = 1234$ км/ч. Пусть наблюдатель видит в бинокль самолёт, находящийся на высоте 20 км и на расстоянии 15 км по горизонтали от наблюдателя. Спустя какое время наблюдатель услышит самолёт?

Решение

Давайте сначала найдём, через какое время наблюдатель услышит звук, испущенный истребителем в начальный момент времени и распространяющийся к нему по прямой:

$$t_0 = \frac{\sqrt{H^2 + L^2}}{c} \approx 73 \text{ с}\,.$$

Здесь $H = 20$ км — высота, на которой летит самолёт; $L = 15$ км — расстояние от самолёта до наблюдателя по горизонтали.

Пусть теперь истребитель испустил звук в момент времени t. Найдём минимальное время, за которое этот звук достигнет наблюдателя.

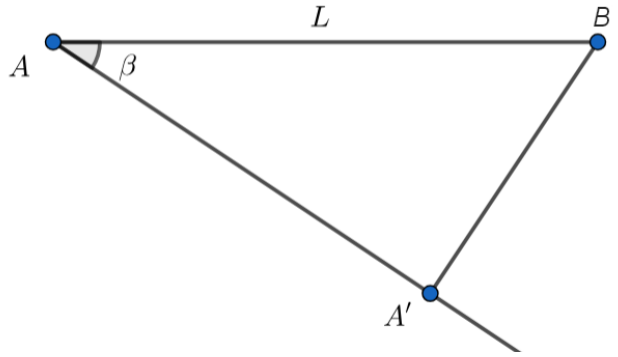


Рис. 2: Плоскость, параллельная поверхности земли, в которой движется самолёт:
A — начальное положение самолёта, A' — положение самолёта в момент времени t
B — проекция точки, в которой расположен наблюдатель, в данную плоскость.

Пусть β — угол между AA' и AB (см. рис. 2). Тогда звук дойдёт до наблюдателя за время T, определяемое выражением

$$T(t) = t + \frac{\sqrt{l^2 + H^2}}{c}\,,$$

где $l = A'B$:

$$l^2 = L^2 + (vt)^2 - 2Lvt\cos\beta\,.$$

Исследуем функцию $T(t)$ на экстремум. Взяв производную, получаем

$$T'(t) = 1 + \frac{v^2 t - Lv\cos\beta}{c\sqrt{l^2 + H^2}}\,.$$

Приравнивая производную к нулю, получим

$$T'(t) = 0,$$

$$-v^2 t + Lv\cos\beta = c\sqrt{L^2 + v^2t^2 - 2Lvt\cos\beta + H^2}.$$

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{cases} L\cos\beta - vt \geq 0, \\ L^2v^2\cos^2\beta - 2Lv^3t\cos\beta + v^4t^2 = c^2v^2t^2 + L^2c^2 - 2Lc^2vt\cos\beta + H^2c^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt \leq L\cos\beta, \\ (v^2 - c^2)v^2t^2 - 2L(v^2 - c^2)vt\cos\beta + L^2(v^2 - c^2) - L^2v^2\sin^2\beta - H^2c^2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Найдём дискриминант:

$$D = (v^2 - c^2)^2 4L^2\cos^2\beta v^2 - 4(v^2 - c^2)v^2\left(L^2(v^2 - c^2) - L^2v^2\sin^2\beta - H^2c^2\right) =$$
$$= 4v^2c^2(v^2 - c^2)(L^2\sin^2\beta + H^2).$$

Тогда корни уравнения

$$t_{12} = \frac{2L(v^2 - c^2)v\cos\beta \pm 2vc\sqrt{v^2 - c^2}\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}}{2(v^2 - c^2)v^2} =$$
$$= \frac{1}{v}\left(L\cos\beta \pm \operatorname{tg}\alpha\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}\right),$$

где $\sin\alpha = \dfrac{c}{v}$.

В силу неравенства системы (1) нам подходит только

$$t_2 = \frac{1}{v}\left(L\cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}\right).$$

В случае если $T''(t_2) > 0$, t_2 будет являться точкой минимума функции $T(t)$. Найдём вторую производную по времени функции $T(t)$:

$$T''(t) = \frac{v^2c\sqrt{l^2 + H^2} - \dfrac{c}{\sqrt{l^2 + H^2}}\left(v^2t - Lv\cos\beta\right)^2}{c^2\left(l^2 + H^2\right)}.$$

Упростив данное выражение, получим, что

$$T''(t) = \frac{v^2 L^2 \sin^2\beta + v^2 H^2}{c\left(l^2 + H^2\right)^{3/2}} > 0.$$

Очевидно, что и $T''(t_2) > 0$. Таким образом, мы показали, что t_2 является точкой минимума функции $T(t)$.

Вспомним, что t_2 является моментом времени, в который самолёт испустил звук; соответственно, t_2 должно быть неотрицательно. Будем рассматривать t_2 как функцию угла β: $t_2(\beta)$. Заметим, что $t_2(-\beta) = t_2(\beta)$; следовательно, поскольку функция является чётной, мы можем ограничиться исследованием знаков $t_2(\beta)$ при $\beta \in [0; 180°]$. Найдём сначала углы, при которых $t_2(t)$ обращается в ноль:

$$\begin{gathered}
t_2(\beta) = 0; \\
\frac{1}{v}\left(L\cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}\right) = 0; \\
L\cos\beta = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}; \\
L^2\cos^2\beta = \operatorname{tg}^2\alpha L^2\sin^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha H^2; \\
L^2\sin^2\beta\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right) = L^2 - H^2\operatorname{tg}^2\alpha; \\
\sin^2\beta = \frac{L^2 - H^2\operatorname{tg}^2\alpha}{L^2}\cos^2\alpha.
\end{gathered}$$

Подставим численные значения и получим, что t_2 обращается в ноль при $\beta = 54°$ и $\beta = 126°$ из промежутка $[0; 180°]$. Исследуем знаки $t_2(\beta)$ на данном промежутке.

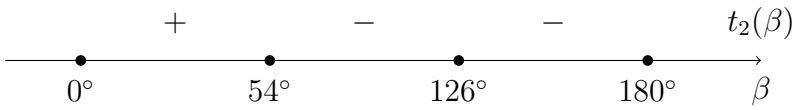


Рис. 3: Знаки функции $t_2(\beta)$ на промежутке $[0; 180°]$

Если добавить условие чётности $t_2(\beta)$, получим, что $t_2(\beta) > 0$ при $\beta \in (-54°; 54°)$, $t_2(\beta) < 0$ при $\beta \in [-180°; -54°) \cup (54°; 180°]$. Таким образом, для углов, при которых t_2 принимает неположительные значения, $\beta \in [-180°; -54°] \cup [54°; 180°]$, звук достигнет

наблюдателя за $T(0) = t_0 \approx 73$ с. Для углов $\beta \in (-54°; 54°)$

$$\begin{aligned} T(t_2) &= t_2 + \frac{\sqrt{l^2 + H^2}}{c} = \\ &= \frac{L}{v}\cos\beta + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v}\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2} = \\ &= \frac{L}{v}\cos\beta + \frac{\sqrt{v^2 - c^2}}{vc}\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}. \end{aligned}$$

Выделим случай, когда самолёт летит прямо на наблюдателя, $\beta = 0$,

$$T_{\beta=0} = \frac{1}{v}\left(L + H\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1}\right) \approx 70 \text{ с}.$$

Ответ: для $\beta \in [-180°; -54°] \cup [54°; 180°]$: $T \approx 73$ с,
для $\beta \in (-54°; 54°)$: $T = \dfrac{L}{v}\cos\beta + \dfrac{\sqrt{v^2 - c^2}}{vc}\sqrt{L^2\sin^2\beta + H^2}$,
для случая $\beta = 0$: $T \approx 70$ с.

Комментарий. При составлении данной задачи мы подразумевали, что самолёт летит так, что в какой-то момент времени окажется ровно над головой наблюдателя, но забыли написать это в условии, так что пришлось решать задачу в более общем виде. Приведём отдельно решение для случая $\beta = 0$.

Можно заметить, что спустя время t после начала движения самолёта звуковые волны будут сосредоточены в конусе с углом раствора 2α, где $\sin\alpha = c/v$.

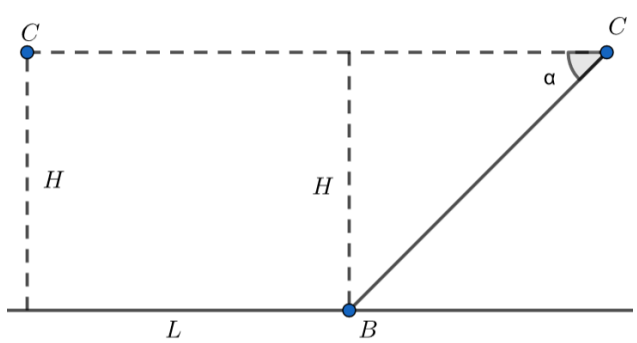
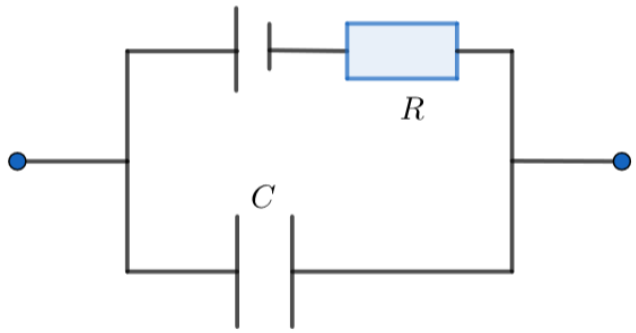


Рис. 4: B — положение наблюдателя, C — положения самолёта.

В таком случае наблюдатель услышит самолёт, когда окажется внутри этого конуса. С помощью представленного рисунка 4 несложно вычислить искомое время:

$$t = \frac{L + H\operatorname{ctg}\alpha}{v} = \frac{1}{v}\left(L + H\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1}\right) \approx 70 \text{ с}.$$

6. Нейрон в мозгу можно рассматривать как электрическую цепь, в которой процессы возбуждения и распространения нервного импульса моделируются с помощью электрических величин, таких как сопротивление, ёмкость и напряжение. Мы будем использовать самую простую электрическую модель нейрона:



Конденсатор C будет символизировать мембрану, сопротивление R — ионные каналы, источник напряжения — напряжение, которое прикладывается к мембране для возбуждения нейрона.

Мозг человека содержит содержит примерно $8 \cdot 10^{10}$ нейронов. Для возбуждения нейрона требуется энергия, пороговое значение которой соответствует возбуждению конденсатора до напряжения $U = 55$ мВ. В течение суток нейроны человеческого мозга возбуждаются в среднем каждые 10^{-1} секунды.

Сколько котлет должен съесть человек, чтобы полученной энергии хватило для возбуждения всех нейронов его мозга в течение недели? Считайте, что одна котлета содержит 200 ккал энергии, где 1 ккал = 4184 Дж, ёмкость конденсатора равна $C = 14$ нФ.

Решение

Для возбуждения одного нейрона ему нужно сообщить энергию E_0, равную

$$E_0 = \frac{CU^2}{2}\,.$$

Найдём количество возбуждённых за неделю нейронов:

$$N = \frac{7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{10^{-1}} \cdot 8 \cdot 10^{10} = 4{,}8384 \cdot 10^{17}.$$

Тогда для возбуждения всех нейронов нужна энергия

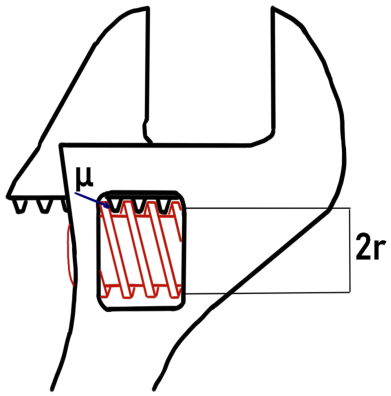
$$E = NE_0 = \frac{NCU^2}{2} \approx 1{,}0245 \cdot 10^7 \text{ Дж} \approx 2{,}4487 \cdot 10^3 \text{ ккал}.$$

Зная, что котлета содержит $E_к = 200$ ккал энергии, получаем, что для возбуждения всех нейронов нужно съесть $n = E/E_к = 12{,}245$ котлет.

Ответ: 12,245 котлет.

2 Отборочный тур младших лиг

1. Теодор помогал отцу с заменой водопроводного крана: зажимал разводным ключом одну из гаек, — и был заворожён этим инструментом. Отец, заметив интерес сына, объяснил устройство и принцип работы ключа: гайка зажимается между подвижной и неподвижной губками ключа, а положение подвижной губки задается вращением червячного винта, или попросту «червяка». Отец предложил Теодору посчитать, насколько большим должно быть число пазов «червяка» на единицу длины n, чтобы гайки можно было надёжно закреплять («червяк» фиксировался в заданном положении). Коэффициент трения между «червяком» и подвижной губкой ключа равен μ, а радиус от оси регулирующего «червяка» до соприкасающихся поверхностей равен r.



Решение

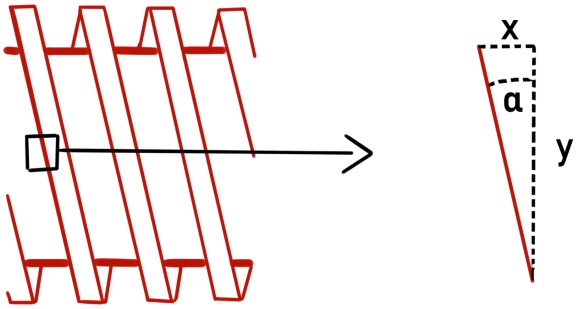


Рис. 5: Устройство «червяка»

Когда пазы «червяка» переместились на расстояние x вдоль оси «червяка», то он повернулся на угол $\varphi = 2\pi nx$ и переместился на расстояние $y = \varphi r = 2\pi nxr$ перпендикулярно

оси. Пусть угол между нормалью к поверхности винтовой резьбы «червяка» и осью вращения равен α, тогда

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{x}{y} = \frac{x}{2\pi n x r} = \frac{1}{2\pi r n}.$$

Также пусть к подвижной губке приложена сила F, имеющая то же направление, что и ось «червяка». Составляющая силы, направленная вдоль резьбы, равна $F \sin\alpha$ и должна быть уравновешена максимально возможной величиной силы трения $\mu F \cos\alpha$. Мы получаем, что $\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2\pi r n}$ или $n \geq \dfrac{1}{2\pi r \mu}$.

Ответ: $n \geq \dfrac{1}{2\pi r \mu}$.

2. Великому уравнителю передали три одинаковых точечных заряда $q = 1$ Кл и попросили некоторым образом уравновесить их. Великий уравнитель заявил, что для этого ему понадобится единственный заряд q', где $q' < 0$. Определите, как нужно расставить эти четыре заряда, чтобы они находились в равновесии. Чему равен заряд q' в данной расстановке?

Решение

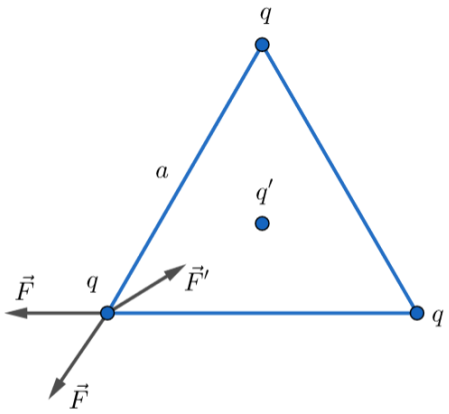


Рис. 6: Расстановка зарядов и силы, действующих на заряд q'.
$F = \dfrac{kq^2}{a^2}$, $F' = \dfrac{kqq'}{(a/\sqrt{3})^2}$

Если поместить заряды q в вершины равностороннего треугольника со стороной a, а q' — в его центр (см. рис. 6), то в силу симметрии заряд q' будет неподвижным. В таком

случае условие равновесия для каждого заряда q записывается следующим образом:

$$2F\cos 30^\circ = F' \quad \Rightarrow \quad \frac{2kq^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{kqq'}{(a/\sqrt{3})^2} \quad \Rightarrow \quad q' = \frac{q}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{Кл}\,.$$

Ответ: $q' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Кл.

3. В бальном зале одного замка король решил повесить люстру массой $m = 300$ кг. Подвешена она будет на четырёх одинаковых стальных стержнях с пределом прочности $P_0 = 0{,}1$ ГПа каждый. Какой должна быть минимальная площадь S поперечного сечения такого стержня, если требуемый запас прочности конструкции равен $n = 10$?

Решение

В первую очередь вспомним, что предел прочности — это максимальная нагрузка, выдерживаемая стержнем, а запас прочности — отношение предела прочности к текущей нагрузке:

$$n = \frac{P_{max}}{P}\,.$$

Текущую нагрузку несложно найти, считая, что она равномерно распределена между стержнями:

$$P = \frac{mg}{4S} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{nmg}{4P_{max}} = 0{,}75\ \text{см}^2\,.$$

Ответ: $S = 0{,}75$ см^2.

4. Пусть имеется кружка с чаем температуры $100^\circ C$. В неё опускают ложку из холодильника $0^\circ C$, а при установлении равновесия её вытаскивают и снова помещают в холодильник. Сколько раз нужно повторить эту процедуру, чтобы чай остыл до $30^\circ C$? Теплоёмкость чая считайте равной $C_1 = 1050$ Дж/$^\circ C$, теплоёмкость ложки — $C_2 = 270$ Дж/$^\circ C$. Теплообменом чая с воздухом пренебречь.

Решение

Пусть изначальная температура чая равняется T_1, температура ложки из холодильника — $T_2 = 0^\circ C$. Тогда для конечной температуры чая после опускания первой ложки T'

имеем выражение

$$T'(C_1 + C_2) = C_1T_1 + C_2T_2 \quad \Rightarrow \quad T' = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}T_1\,.$$

Для температуры T'' после опускания второй ложки получим

$$T'' = \frac{C_1T' + C_2T_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}T' \quad \Rightarrow \quad T'' = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 T_1\,.$$

Видно, что после каждой такой итерации температура чая уменьшается в одинаковое число раз. Для того чтобы найти минимальное количество необходимых итераций n, нужно решить следующее неравенство:

$$\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n T_1 \leq 30°C \quad \Rightarrow \quad n = 6\,.$$

Примечание. В реальности пренебрегать теплообменом с воздухом не стоит.

Ответ: процедуру нужно повторить 6 раз.

5. В Штирлица стреляют горизонтальным лазерным лучом. Штирлиц держит карманное зеркальце в своих руках. «Занятно», — думает Штирлиц, пытаясь отразить луч зеркальцем. Под каким углом к лучу Штирлицу нужно установить зеркальце, чтобы отразить луч горизонтально вправо?

Решение

Пусть некоторый луч падает на плоское зеркало и отражается от него. Заметим, что если повернуть зеркало на угол α так, что угол падения также увеличится на α, то из-за поворота нормали отражённый луч повернётся на 2α по сравнению с отражением от неповёрнутого зеркала. Тогда понятно: чтобы отразить лазер вправо, Штирлицу необходимо установить зеркало под углом 45°.

Ответ: 45°.

6. Перейдите к делам насущным и оцените длину шкурки, которую вы можете снять, почистив килограмм картошки. Килограмм какой картошки можно быстрее почистить:

крупной или мелкой? Отдельно рассмотрите предельный переход к случаю очень мелкой картошки.

Решение

В качестве верного решения принималась любая адекватная физическая модель и верно сделанная в рамках этой модели оценка.

7 декабря 2024 года

3 Старшая высшая лига

1. Теодор и Соня решили попрактиковаться в стрельбе из игрушечного пистолетика. Для этого они поместили мячик массой $M = 0{,}2$ кг на вертикальный столб высотой $h = 5$ м. Пуля, которой стреляет их пистолет, имеет массу $m = 0{,}01$ кг. Соня прицелилась с балкона второго этажа и выстрелила так, что пуля полетела строго параллельно земле и достигла мяча, имея скорость $v_0 = 500$ м/с, после чего пробила мяч насквозь, пролетев ровно через его центр масс. Мяч упал на землю, преодолев $s = 20$ м по горизонтали. Соня сразу побежала смотреть, как далеко от столба пуля упала на землю.

   Определите, какое расстояние от столба Соня должна пробежать, чтобы найти пулю. Теодора же заинтересовали потери энергии на тепло. Помогите ему найти отношение энергии, преобразовавшейся в тепло, и исходной кинетической энергии пули. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2.

   Комментарий. В ходе решения задач участникам было дано уточнение, что пуля полетела и продолжила лететь горизонтально, пока не достигла мяча.

   Решение

   Пусть скорость шара после столкновения равна V, а скорость пули — v. Поскольку на систему «шар + пуля» не действует горизонтальная сила, горизонтальная составляющая импульса этой системы до столкновения и после столкновения должна быть одинаковой:

$$mv_0 = mv + MV \qquad \Longrightarrow \qquad v = v_0 - \frac{M}{m}V.$$

   Из условия задачи следует, что $v > V$. После столкновения и шар, и пуля продолжают свободное движение в гравитационном поле с начальными горизонтальными скоростями v и V соответственно. Движение шара и движение пули продолжаются в течение

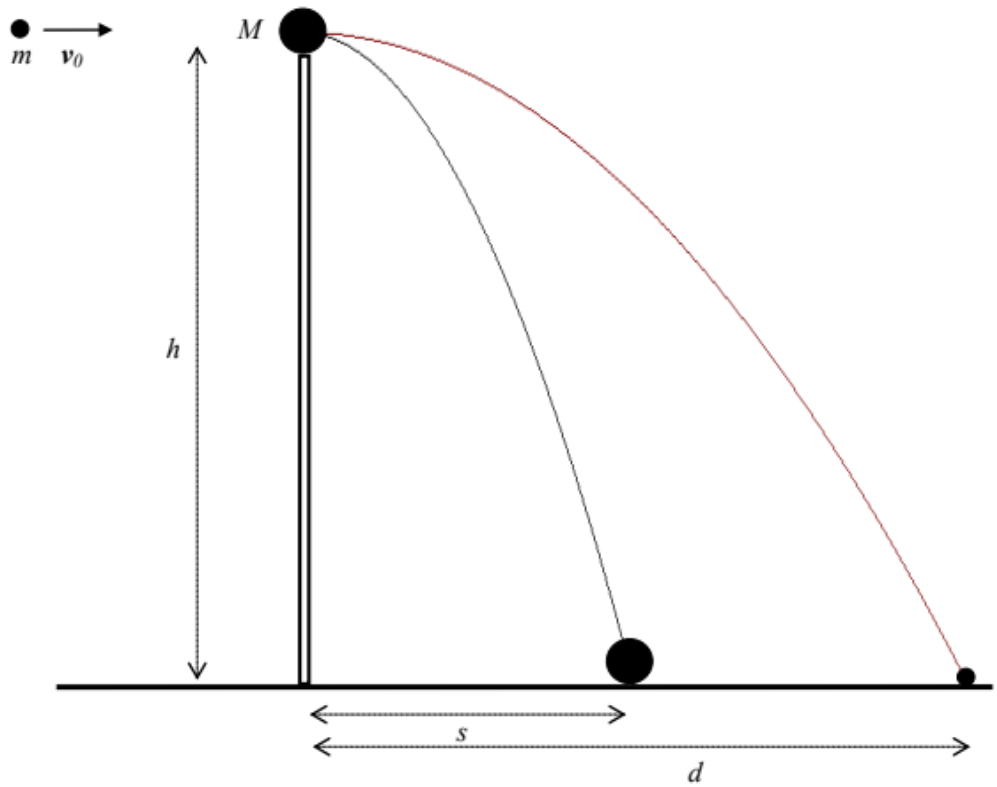


Рис. 7: Движение мяча и пули

одного и того же времени, равного времени свободного падения с высоты h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Пути, пройденные шаром и пулей за время t, $s = Vt$ и $d = vt$ соответственно. Таким образом,

$$V = s\sqrt{\frac{g}{2h}} \implies v = v_0 - \frac{M}{m}s\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Отсюда получаем выражение и численное значение для искомого расстояния d:

$$d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m}s = 100 \text{ м}.$$

Полная кинетическая энергия системы равнялась начальной кинетической энергии пули:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Сразу после столкновения полная кинетическая энергия системы равна сумме кинети-

ческих энергий пули и шара:

$$E_m = \frac{mv^2}{2}, \quad E_M = \frac{MV^2}{2}.$$

Часть кинетической энергии, равная разности кинетических энергий до и после столкновения, переходит в теплоту:

$$\Delta E = E_0 - (E_m + E_M).$$

Искомое отношение полученной теплоты к начальной кинетической энергии пули:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \frac{(E_m + E_M)}{E_0}.$$

Подставляя в выражение найденные ранее соотношения для энергий и скоростей, получаем:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{M}{m}\frac{s^2}{v_0^2}\frac{g}{2h}\left(2\frac{v_0}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M+m}{m}\right) = 92{,}8\ \%.$$

Ответ: $d = 100$ м, $\dfrac{\Delta E}{E_0} = 92{,}8\%$.

2. Соне подарили новый аквариум, и она занялась установкой всего необходимого. Когда дело дошло до освещения, она задумалась, на какой стенке аквариума нужно закрепить светильник. Она представила свою маленькую рыбку Федю плывущей на расстоянии $d = 0{,}2$ м от стенки, на которой закреплён светильник. Светильник она считает точечным изотропным источником света. При этом прямая линия от источника света до рыбки перпендикулярна стенке аквариума.

   Помогите Соне выбрать такое положение светильника, при котором интенсивность освещения рыбки будет больше, — с внутренней стороны аквариума в воде или с его наружной стороны. Интенсивность I определяется как отношение мощности падающего излучения к площади освещаемой поверхности.

   Соня также считает, что стенки аквариума сделаны из тонкого стекла с показателем преломления $n_{\text{ст}} = 1{,}50$, а показатель преломления воды $n_{\text{в}} = 1{,}33$. При переходе света из воздуха (через стенку аквариума) в воду поглощается часть его первоначальной интенсивности, равная $1 - \eta$, где $\eta = 0{,}7$. Поглощением света в воде и его отражением на границе сред можно пренебречь. Рыбка Федя ещё маленькая — d много больше размеров рыбки.

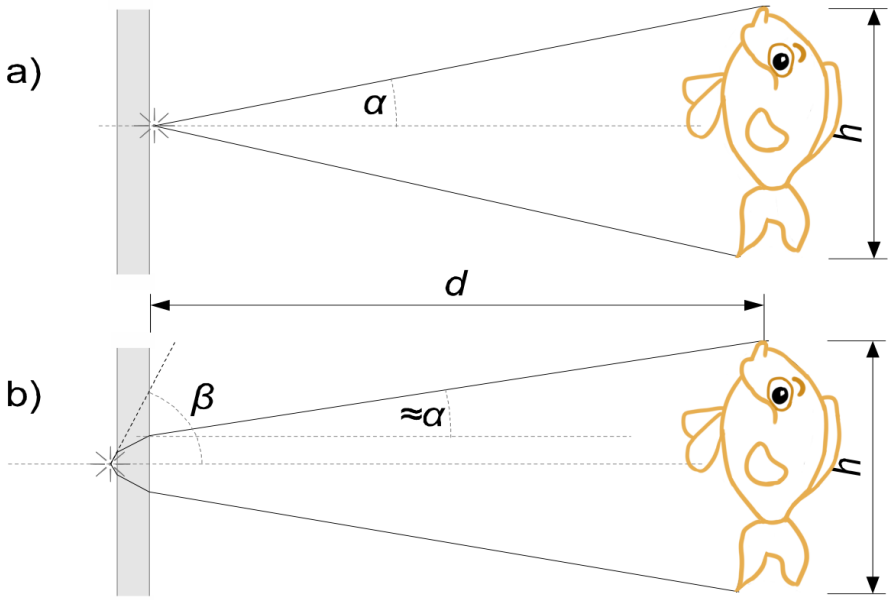


Рис. 8: Ситуация в проекции на плоскость, перпендикулярную стенке в случае, если a) светильник закреплён с внутренней стороны аквариума, b) светильник закреплён с внешней стороны аквариума.

Решение

Рассмотрим ситуацию в проекции на плоскость, перпендикулярную стенке, как на рисунке выше. Пусть α — угол, который крайний луч, падающий на рыбку, составляет с нормалью к плоскости стенки аквариума. Поскольку толщина стеклянной стенки очень мала, в обоих рассмотренных случаях этот угол примерно одинаков. В ситуации, представленной на рисунке, он равен

$$\alpha \approx \frac{h/2}{d},$$

где мы учитываем, что $h \ll d$ (помним, что рыбка Федя ещё маленькая). В случае если светильник закреплен с внутренней стороны, угол α — это угол, образуемый рассматриваемым лучом и нормалью к стенке аквариума сразу после выхода из источника. Если же светильник закреплен с внешней стороны стекла, угол β, который рассматриваемый крайний луч составляет с нормалью к стенке аквариума сразу после выхода из источника, оказывается больше угла α. А уже после преломления луч пойдет под углом приблизительно равным α (см. рис. 9).

Применяя закон Снеллиуса к преломлению на границе воздух–стекло и преломлению

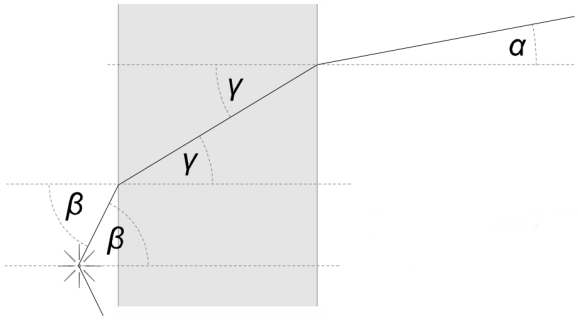


Рис. 9: Преломление света на границе воздух–стекло и стекло–вода в случае если светильник закреплён с внешней стороны аквариума.

на границе стекло–вода, получаем

$$\sin\beta = n_{\text{ст}} \sin\gamma,$$

$$n_{\text{ст}} \sin\gamma = n_{\text{в}} \sin\alpha.$$

Откуда получаем выражение

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{\beta}{\alpha} = n_{\text{в}},$$

где мы воспользовались тем, что углы маленькие (помним, что рыбка Федя маленькая, ей ещё расти и расти). Заметим, что приведённая формула справедлива и для любых других крайних лучей, падающих на рыбку, например если рассматривать ситуацию в плоскости, перпендикулярной стенке и рассматриваемой плоскости.

Поскольку источник изотропен, интенсивность освещения рыбки пропорциональна телесному углу, определяемому лучами, выходящими из источника и затем попадающими на рыбку. Этот телесный угол в случае крепления светильника внутри аквариума пропорционален α^2, а в случае крепления снаружи он пропорционален β^2. Учтём, что часть излучения поглощается при переходе из воздуха в воду, получаем

$$I_2/I_1 = \eta \cdot (n_{\text{в}})^2 \approx 1{,}24 > 1.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $I_2/I_1 > 1$, рыбка Федя будет лучше освещена в случае крепления светильника снаружи аквариума.

Примечание. Помещать неспециализированные электроприборы в воду — явно плохая идея.

Ответ: Рыбка лучше освещена в случае крепления светильника снаружи аквариума.

3. Теодор на чердаке своего дедушки-экспериментатора обнаружил теплоизолированный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 1$ дм^2 и высотой $h = 22{,}4$ дм, одно из оснований которого оказалось поршнем. Цилиндр разделен поперёк на две равные половины тонкой стенкой с клапаном. Клапан открывается, если давление в секции цилиндра с поршнем больше, чем давление в секции с фиксированным основанием. Вместе с цилиндром Теодор обнаружил записку, в которой говорилось, что в запаянной части цилиндра находится $m_1 = 12$ г гелия, а в секции с поршнем— $m_2 = 2$ г. Вся система находится в тепловом равновесии при температуре $T_0 = 0\ ^\circ C$, атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

   Теодор положил цилиндр горизонтально и начал медленно задвигать поршень, пока не открылся внутренний клапан. Как только в цилиндре установилось тепловое равновесие, Теодор продолжил двигать поршень внутрь цилиндра до тех пор, пока он не достиг стенки посередине цилиндра. Теодору стало интересно, какую полную работу он совершил в таком процессе. Помогите ему определить её. Молярная масса гелия $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

   Указание. Процесс, при котором состояние системы меняется без передачи тепла, называется адиабатическим. Уравнение адиабаты $PV^\gamma = const$, где γ— показатель адиабаты, в данной задаче он равен 5/3.

Комментарий. В ходе решения задач участникам было дано уточнение, что клапан не пропускает тепло.

Решение

Обозначим начальное давление в части цилиндра с поршнем

$$P_0 = \frac{m_2 R T_0}{M V_0},$$

где $V_0 = Sh/2$. Подставив данные, получим $P_0 \approx 10^5$ Па, то есть начальное давление совпадает с атмосферным, как и должно быть. Во второй половине давление определяется аналогично:

$$P_1 = \frac{m_1 R T_0}{M V_0} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Таким образом, клапан исходно закрыт: $P_1 > P_0$. Далее происходит адиабатическое сжатие до тех пор, пока давление в двух секциях не сравняется:

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma,$$

где V_1 — объём гелия после сжатия, то есть тот объём, при котором клапан откроется. Соответственно, температура гелия в секции с поршнем после сжатия

$$T_1 = \frac{MP_1V_1}{m_2R}.$$

Работа, совершённая над газом, полностью преобразовалась во внутреннюю энергию гелия:

$$W_1 = \frac{3}{2}\frac{m_2}{M}R(T_1 - T_0) \approx 1780 \text{ Дж}.$$

Далее клапан открылся и две секции с гелием обмениваются теплом, результирующая температура —

$$m_1(T_2 - T_0) = -m_2(T_2 - T_1) \implies T_2 = \frac{m_1T_0 + m_2T_1}{m_1 + m_2} \approx 314 \text{ K}.$$

Далее вновь происходит адиабатическое сжатие, пока гелий не займёт всю запаянную секцию, а именно объём $V_3 = V_0$. Обозначим $V_2 = V_0 + V_1$, тогда, переписав уравнение адиабаты с помощью уравнения состояния идеального газа, получим

$$T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1} \implies T_3 \approx 382 \text{ K}.$$

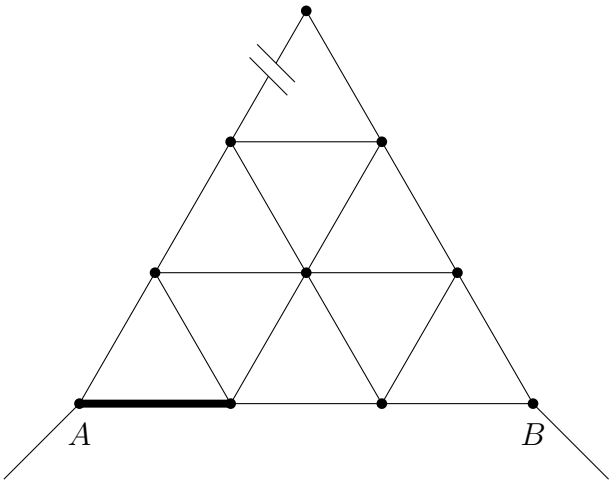
Зная температуру, можем найти работу, совершённую над газом при повторном сжатии:

$$W_2 = \frac{3}{2}\frac{m_2 + m_1}{M}R(T_3 - T_2) \approx 2960 \text{ Дж}.$$

Чтобы найти работу, которую совершил Теодор, достаточно сложить W_1 и W_2 и отнять работу атмосферы $W_{\text{атм}} = P_0V_0 \approx 1120$ Дж.

Ответ: $W = 3620$ Дж.

4. Теодор решил украсить квартиру гирляндой из светодиодной ленты: для этого он расположил её в форме ёлки (по крайней мере, так ему казалось). Углы между всеми звеньями гирлянды равны 60°. Сопротивление звена гирлянды, выделенного жирным, равно R.



Звенья, имеющие одинаковую длину, имеют одинаковое сопротивление. В какой-то момент Теодор заметил, что случайно установил вместо одного звена гирлянды конденсатор. Определите сопротивление получившейся гирлянды (между точками A и B).

Решение

Метод 1.

Будем использовать преобразование звезда–треугольник для одинаковых резисторов: если у нас есть «треугольник» из резисторов сопротивлением R,

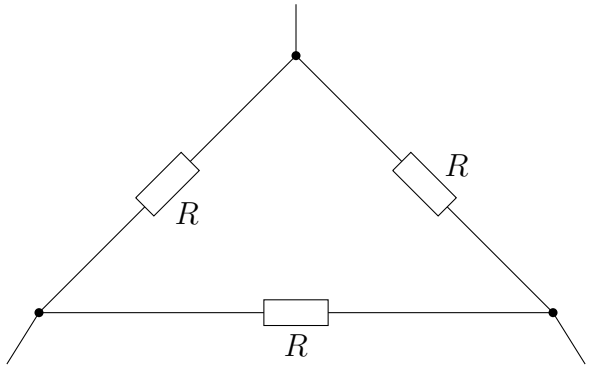


Рис. 10: «Треугольник» из одинаковых резисторов

мы можем заменить его «звездой» из резисторов сопротивлением $r = \dfrac{R}{3}$.

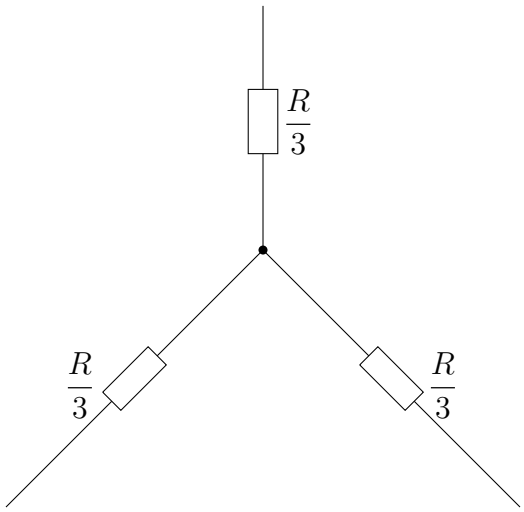


Рис. 11: «Звезда», соответствующая «треугольнику» на рис. 10

Можно считать, что через часть цепи, содержащую конденсатор, ток не течёт.

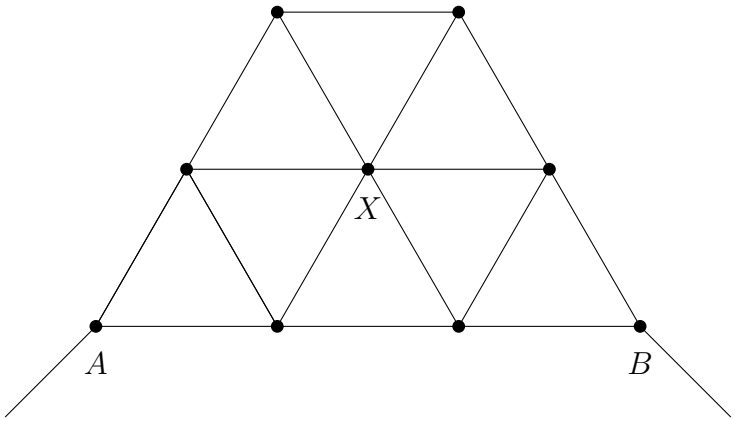


Рис. 12: Цепь без участка с конденсатором

Узел в центре соединения X представим как соединение трёх узлов (см. рис. 13).

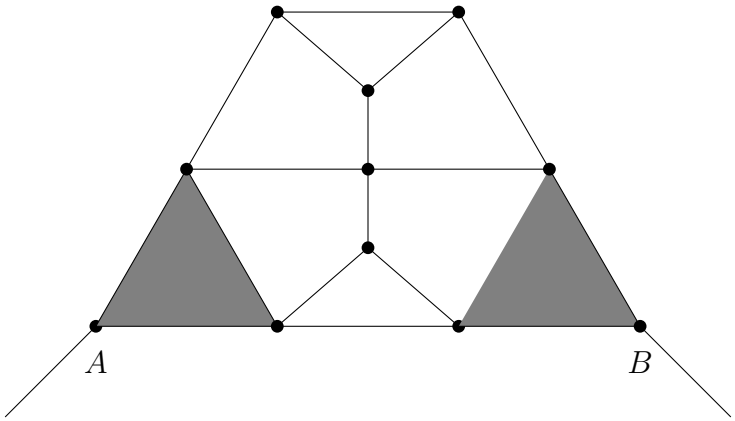


Рис. 13: Цепь с «расщеплённым» узлом X.
Серым выделены треугольники, для которых будет применено преобразование «треугольник–звезда»

Потенциалы в узлах, получившихся из узла X, одинаковы, следовательно, мы можем убрать гипотетические проводники, их соединяющие. Для треугольников, выделенных серым, применим преобразование «треугольник–звезда».

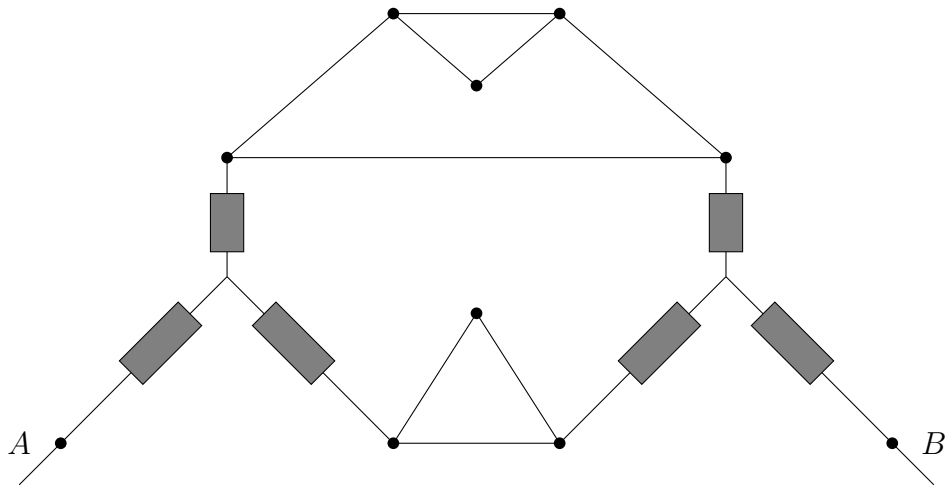


Рис. 14: Модифицированная цепь с рис. 13

Построим схему, эквивалентную данной.

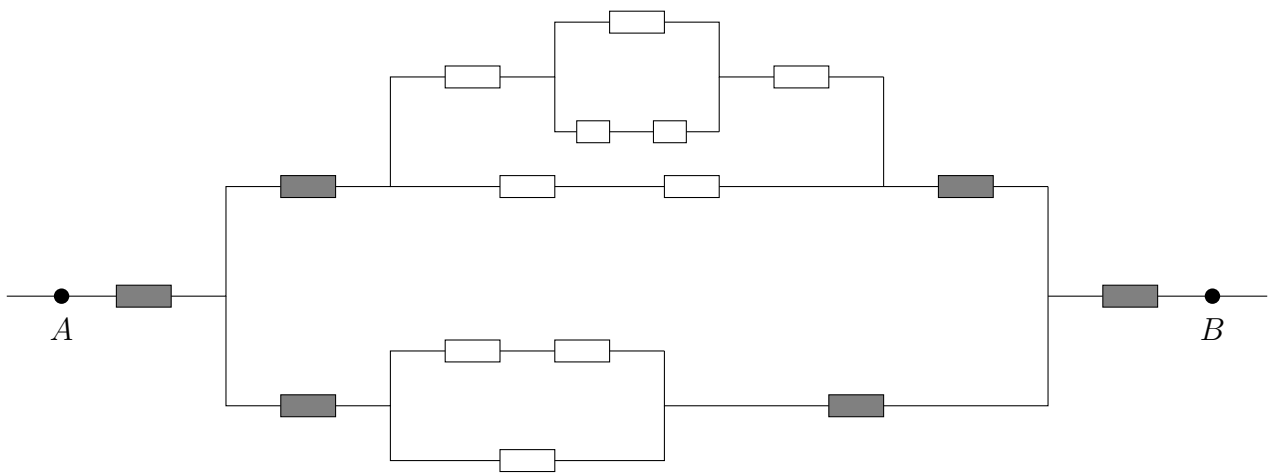


Рис. 15: Эквивалентная цепь

Здесь белые резисторы имеют сопротивление R, серые — $\dfrac{R}{3}$. Рассчитав сопротивление между точками A и B, получим

$$R_{AB} = \frac{142}{99}R \approx 1{,}434R.$$

Метод 2.

Можно считать, что через часть цепи, содержащую конденсатор, ток не течёт.

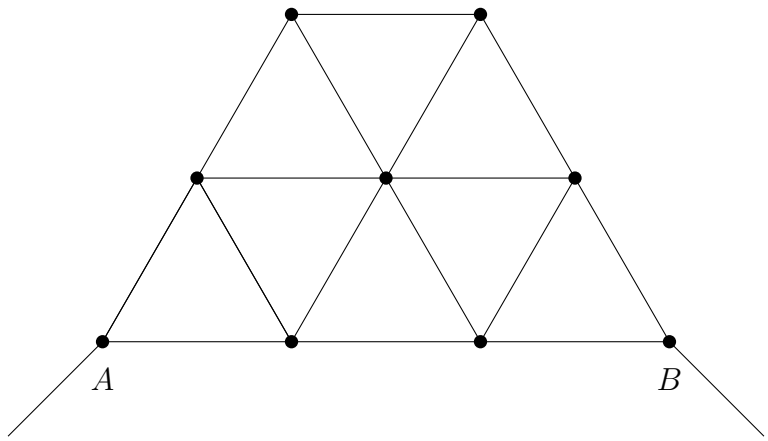


Рис. 16: Цепь без участка с конденсатором

Воспользуемся правилами Кирхгофа для данной схемы. Для этого обозначим все узлы и выберем направление тока в каждой ветке.

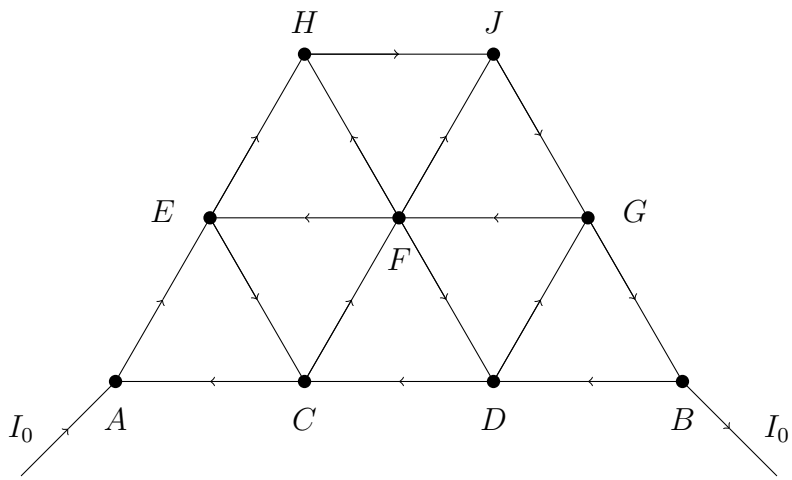


Рис. 17: Цепь с рис. 16 с обозначениями узлов и выбором направлений токов

Запишем первое правило Кирхгофа (алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в каждом узле любой цепи, равна нулю) для всех узлов, кроме узла F:

$$\begin{cases} \text{узел A:} \;\; I_{CA} + I_0 = I_{AE}; \\ \text{узел B:} \;\; I_{GB} = I_{BD} + I_0; \\ \text{узел C:} \;\; I_{DC} + I_{EC} = I_{CF} + I_{CA}; \\ \text{узел D:} \;\; I_{FD} + I_{BD} = I_{DG} + I_{DC}; \\ \text{узел E:} \;\; I_{AE} + I_{FE} = I_{EH} + I_{EC}; \\ \text{узел G:} \;\; I_{JG} + I_{DG} = I_{GF} + I_{GB}; \\ \text{узел H:} \;\; I_{EH} + I_{FH} = I_{HJ}; \\ \text{узел J:} \;\; I_{HJ} + I_{FJ} = I_{JG}. \end{cases} \tag{2}$$

Запишем второе правило Кирхгофа (если в контуре нет источников ЭДС, то суммарное падение напряжений равно нулю) для восьми контуров, выбрав в каждом направление обхода по часовой стрелке, учитывая, что сопротивление всех участков одинаково и его можно сократить:

$$\begin{cases} \text{контур AEC:} \;\; I_{CA} + I_{AE} + I_{EC} = 0; \\ \text{контур EFC:} \;\; -I_{EC} - I_{FE} - I_{CF} = 0; \\ \text{контур CFD:} \;\; I_{CF} + I_{FD} + I_{DC} = 0; \\ \text{контур DGB:} \;\; I_{DG} + I_{GB} + I_{BD} = 0; \\ \text{контур FGD:} \;\; -I_{GF} - I_{FD} - I_{DG} = 0; \\ \text{контур EHF:} \;\; I_{EH} - I_{FH} + I_{FE} = 0; \\ \text{контур HJF:} \;\; I_{HJ} - I_{FJ} + I_{FH} = 0; \\ \text{контур FJG:} \;\; I_{FJ} + I_{JG} + I_{GF} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Объединим уравнения (2) и (3) в одну систему и решим их, выразив все токи через I_0. Получим:

$$I_{AE} = I_{GB} = \frac{47}{99}I_0; \quad I_{EH} = I_{JG} = \frac{2}{11}I_0; \quad I_{HJ} = \frac{4}{33}I_0;$$
$$I_{BD} = I_{CA} = -\frac{52}{99}I_0; \quad I_{DC} = -\frac{38}{99}I_0; \quad I_{EC} = I_{DG} = \frac{5}{99}I_0;$$
$$I_{CF} = I_{FD} = \frac{19}{99}I_0; \quad I_{FE} = I_{GF} = -\frac{8}{33}I_0; \quad I_{FJ} = -I_{FH} = \frac{2}{33}I_0.$$

Пусть U — разность потенциалов между точками A и B, R_{AB} — искомое сопротивление гирлянды, тогда с одной стороны,

$$U = I_0 R_{AB},$$

с другой стороны,

$$U = |I_{CA}|R + |I_{DC}|R + |I_{BD}|R = \left(\frac{52}{99} + \frac{38}{99} + \frac{52}{99}\right) I_0 R = \frac{142}{99} I_0 R.$$

Значит,

$$R_{AB} = \frac{142}{99} R.$$

Ответ: $\frac{142}{99} R$.

Комментарий. Во время решения задач мы дали одной из команд комментарий, позволивший ей рассмотреть участок с конденсатором как идеальный проводник. Поскольку такой вариант цепи разбирался на бое, рассмотрим его и здесь.

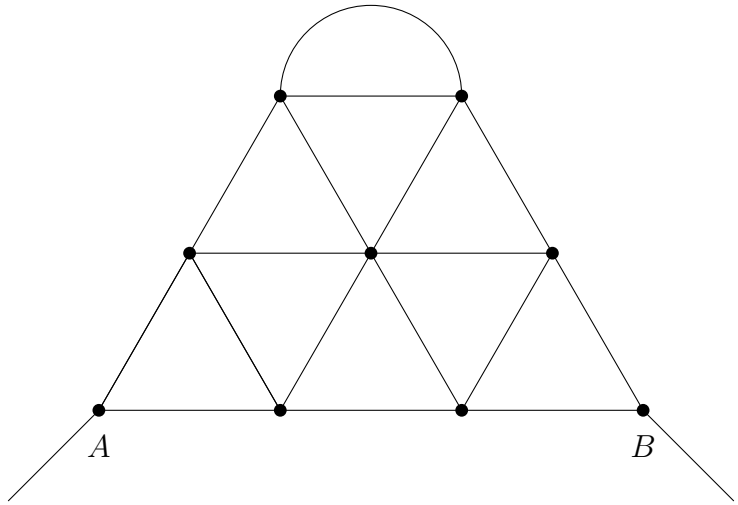


Рис. 18: Цепь из условия, если конденсатор заменить на идеальный проводник. Участок в виде дуги окружности имеет сопротивление R

Воспользуемся правилами Кирхгофа для данной схемы. Для этого обозначим все узлы и выберем направление тока в каждой ветке.

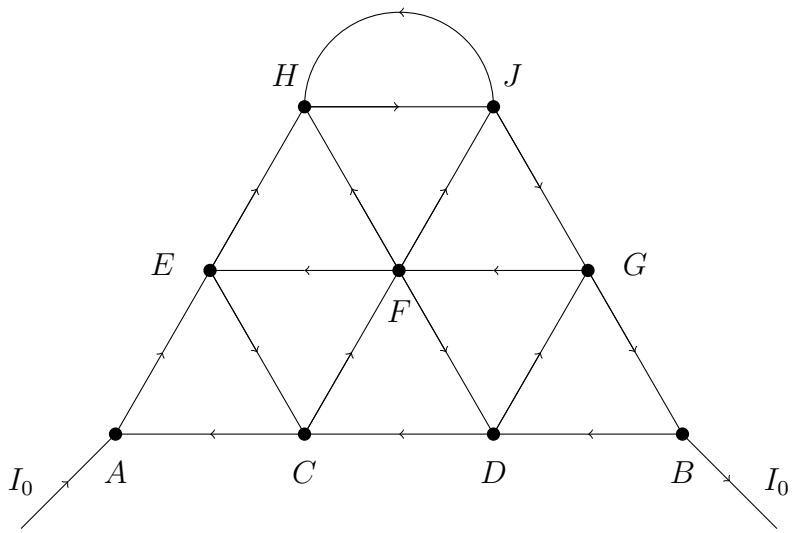


Рис. 19: Цепь с рис. 18 с обозначениями узлов и выбором направлений токов

Мы можем рассмотреть участок между точками H и J как один резистор сопротивлением $\dfrac{R}{2}$. Тогда всё, что нам потребуется изменить в системе линейных уравнений, следующих из правил Кирхгофа, — заменить I_{HJ} на $\dfrac{I_{HJ}}{2}$ в системе (3) в уравнении для контура HJF.

Решим уравнения из системы (2) и модифицированной системы (3), объединив их в одну систему. Получим, что

$$I_{CA} = \frac{80}{153}I_0,\ \ I_{AE} = I_{GB} = \frac{73}{153}I_0,\ \ I_{BD} = -\frac{80}{153}I_0,\ \ I_{DC} = \frac{58}{153}I_0,$$
$$I_{EC} = I_{DG} = \frac{7}{153}I_0,\ \ I_{CF} = I_{FD} = \frac{29}{153}I_0,\ \ I_{FE} = I_{GF} = -\frac{4}{17}I_0,$$
$$I_{EH} = I_{JG} = \frac{10}{51}I_0,\ \ I_{FH} = -\frac{2}{51}I_0,\ \ I_{HJ} = \frac{8}{51}I_0,\ \ I_{FJ} = \frac{2}{51}I_0.$$

Пусть U — разность потенциалов между точками A и B, R_{AB} — искомое сопротивление гирлянды, тогда с одной стороны,

$$U = I_0 R_{AB},$$

с другой стороны,

$$U = |I_{CA}|R + |I_{DC}|R + |I_{BD}|R = \left(\frac{80}{153} + \frac{58}{153} + \frac{80}{153}\right) I_0 R = \frac{218}{153} I_0 R.$$

Значит,

$$R_{AB} = \frac{218}{153}R.$$

5. Соня и Теодор спорили на тему глобального потепления и решили рассмотреть следующую упрощённую модель атмосферы Земли: в ней слой атмосферы, окружающей Землю, во-первых, отражает $\mu = 30\%$ падающего на него солнечного излучения обратно в космос и пропускает остальное излучение, не поглощая его; во-вторых, полностью поглощает всё излучение, приходящее с поверхности Земли; в-третьих, излучает во все стороны одинаково.

   Землю они считают абсолютно чёрным телом, для которого выполняется закон Стефана–Больцмана: мощность, излучаемая на единицу площади, определяется как $w = \sigma T^4$, где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot K^4}$, а T — температура тела. Поверхность Земли также поглощает весь достигающий её солнечный свет.

   Интенсивность излучения, приходящего от Солнца, составляет $w_0 = 1400\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Найдите среднюю температуру поверхности Земли согласно предложенной Соней и Теодором модели.

Решение

Полная мощность, поступающая от Солнца и проходящая через атмосферу к Земле:

$$P_\text{с} = w_0 \left(1 - \mu\right) \pi R^2,$$

где R — радиус Земли. Поскольку атмосфера не пропускает излучение, приходящее от Земли, то в случае равновесия атмосфера должна излучать ту же мощность в космос: $P_\text{с} = P_a$, где P_a — мощность, излучаемая атмосферой в космос.

Мощность, излучаемая Землёй, выражается как

$$P_\text{з} = 4\pi R^2 \sigma T_\text{з}^4,$$

где $T_\text{з}$ — искомая температура поверхности Земли. В случае равновесия она равна сумме мощностей — получаемой от Солнца и излучённой атмосферой в сторону Земли:

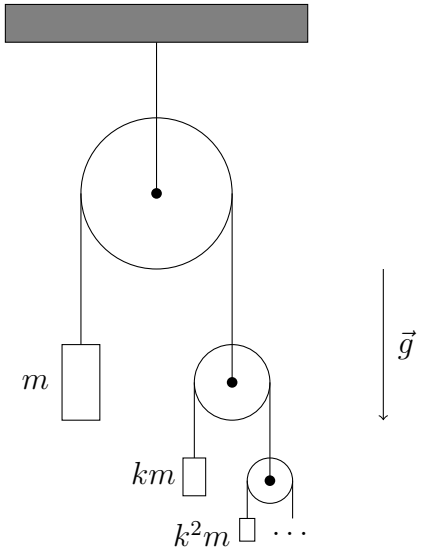
$$P_\text{з} = P_\text{с} + P_a = 2P_\text{с}.$$

Отсюда температура поверхности Земли выражается как

$$T_\text{з} = \sqrt[4]{\frac{w_0 \left(1 - \mu\right)}{2\sigma}} = 305\ \text{К}.$$

Ответ: 305 К.

6. Соня скучала на зимних каникулах, как вдруг обнаружила на кухне ящик мандаринов. Она взяла 1 кг мандаринов и подвесила их к левому краю нерастяжимой нити, перекинутой через блок. К правому краю этой же нити Соня присоединила ещё один блок, через который перекинула ещё одну нерастяжимую нить. За левый конец этой нити она подвесила k кг мандаринов, $0 < k < 1$, а за правый — ещё один блок. Любопытная Соня задумалась, какое ускорение будет у первого мандаринового груза, если продолжать этот процесс до бесконечности так, чтобы каждый мандариновый груз был в $\frac{1}{k}$ раз меньше предыдущего. Помогите Соне определить это ускорение. Все блоки считать невесомыми.



Решение

Прежде чем перейти к бесконечной последовательности блоков, выведем правило упрощения схемы блоков, аналогичное последовательному и параллельному соединению резисторов.

Давайте сначала рассмотрим случай одного простого блока, прикреплённого к некоторой нити, на которую он оказывает силу F_0. На каждой стороне блока находится по одному грузу. Обозначим их массы через m_1 и m_2. Ускорение, с которым движется блок, обозначим через a_0.

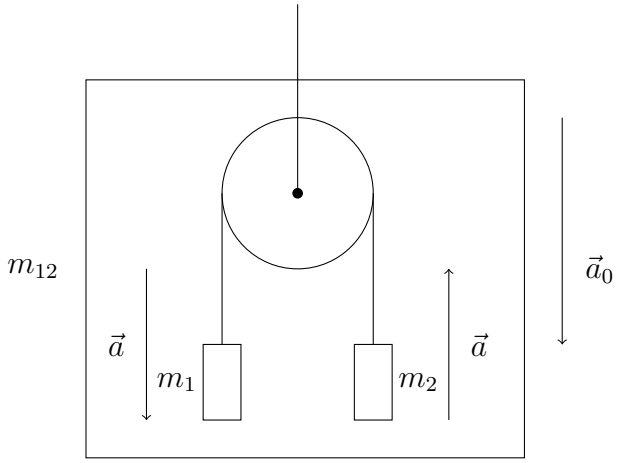


Рис. 20: Один блок с двумя грузами, движущийся с ускорением a_0

На систему грузов m_1 и m_2, связанных нитью, силы $m_1 a_0$ и $m_2 a_0$ действуют в противоположных направлениях. Более того, согласно второму закону Ньютона, оба груза должны двигаться с одинаковым ускорением a относительно блока. Это даёт нам

$$(m_1 + m_2)a = m_1 a_0 - m_2 a_0,$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} a_0. \tag{4}$$

Мы задали положительное направление a для движения груза m_1 вниз и m_2 вверх относительно блока.

Выразим силу натяжения нити через ускорение первого груза:

$$T = m_1(a_0 - a).$$

Подставив выражение, полученное для ускорения a, будем иметь

$$T = m_1 \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} a_0\right) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_0.$$

Сила натяжения нити, за которую подвешен блок, в два раза больше:

$$F_0 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_0.$$

Мы видим, что эта сила пропорциональна ускорению блока. Таким образом, мы можем заменить весь блок одним грузом массой

$$m_{12} = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотрим теперь случай бесконечной последовательности блоков. Каждый груз из мандаринок в нашей системе в $\frac{1}{k}$ раз меньше предыдущего. Нашу бесконечную систему блоков, подвешенных на одной нити, можно заменить одним грузом, воздействие которого на нить будет таким же. Обозначим пока неизвестную массу такого груза через M.

Представим, что мы убрали первый (и самый большой) блок с первым грузом. Это оставляет нас с той же бесконечной системой, что и в прошлый раз, но все массы в ней будут отличаться в k раз. Это значит, что мы можем заменить эту систему одним грузом с массой kM.

Итак, у нас есть блок с двумя грузами: m и kM. Тогда, согласно нашим рассуждениям про блок с двумя подвешенными грузами, мы можем заменить такую систему грузом массы

$$M = \frac{4mkM}{m + kM}.$$

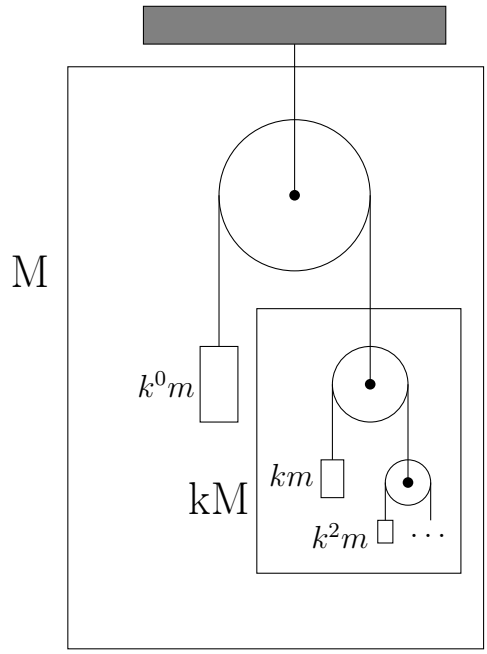


Рис. 21: Бесконечная последовательность блоков

Решив это уравнение относительно M, получим два решения:

$$M_1 = 0;$$
$$M_2 = \frac{(4k-1)m}{k}.$$

Для первого случая $M_1 = 0$ получается ускорение

$$a_1 = g.$$

В этом случае все грузы падают свободно. Сила натяжения нити, за которую подвешен блок, в этом случае равна нулю. Такое возможно, только если массы всех грузов равны нулю. Такой случай, очевидно, не соответствует нашей ситуации с подвешиванием мандаринок.

Второй случай является более реалистичным. У нас есть один блок с грузами m и $kM = (4k-1)m$ на нём. Ускорение первого груза вычисляется с помощью соотношения (4), куда мы подставим обе массы и $a_0 = g$:

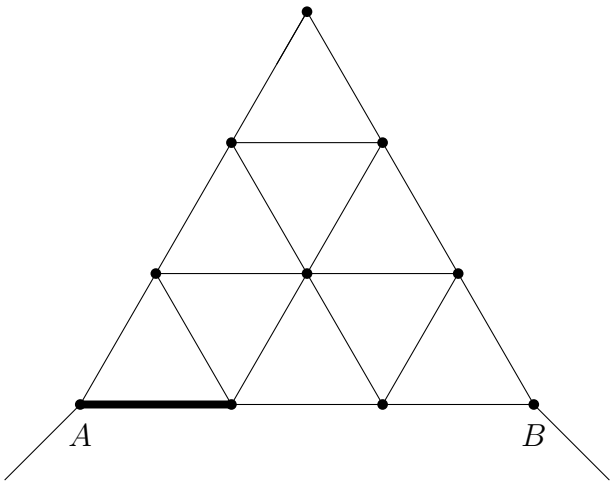
$$a = \frac{m-(4k-1)m}{m+(4k-1)m}g;$$
$$a = \frac{1-2k}{2k}g.$$

Если $k = \frac{1}{2}$, вся система будет находиться в равновесии, а ускорение будет равно нулю. При $k < \frac{1}{2}$ первый груз будет ускоренно двигаться вниз, а при $k > \frac{1}{2}$ — вверх.

Ответ: $a = \frac{1-2k}{2k}g$.

4 Старшая первая лига

1. Теодор решил украсить квартиру гирляндой из светодиодной ленты: для этого он расположил её в форме ёлки (по крайней мере, так ему казалось). Углы между всеми звеньями гирлянды равны 60°. Сопротивление звена гирлянды, выделенного жирным, равно R. Звенья, имеющие одинаковую длину, имеют одинаковое сопротивление. Определите сопротивление получившейся гирлянды (между точками A и B).



Решение

Обозначим узлы данной цепи:

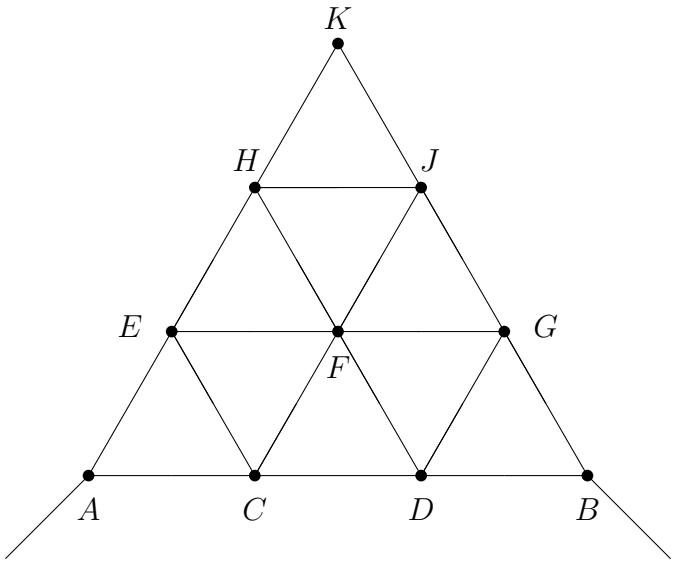


Рис. 22: Цепь–гирлянда с обозначением узлов

Заметим, что схема является симметричной относительно вертикальной оси, проходящей через узел F. Обозначим ток, протекающий на участке HK, через I; ток, протекающий на участке CF, — через I_1; ток, протекающий на участке EC, — через I_2. Остальные токи расставим из упомянутых соображений симметрии и законов Кирхгофа.

- Ток на участке KJ совпадает с током на участке HK из соображений симметрии.
- Разность потенциалов между точками H и J тогда

$$U_{HJ} = IR + IR,$$

  значит, ток на участке HJ равен $2I$.
- Токи на участках HF и FJ совпадают из соображений симметрии. Разность потенциалов между точками H и J равна $2IR$, значит, токи на участках HF и FJ равны I.
- Сумма токов, входящих в узел H, должна совпадать с суммой токов, выходящих из этого узла, значит, ток на участке EH равен $4I$. Из соображений симметрии ток на участке JG также равен $4I$.
- Разность потенциалов между точками E и F тогда равна:

$$U_{EF} = 4IR + IR,$$

  значит, ток на участке EF равен $5I$. Аналогично ток на участке FG также равен $5I$.
- Разность потенциалов между точками C и D:

$$U_{CD} = I_1R + I_1R,$$

  значит, ток, протекающий на участке CD, равен $2I_1$.
- Сумма токов, входящих в узел C, должна совпадать с суммой токов, выходящих из этого узла, значит, ток на участке AC равен $3I_1 - I_2$. Аналогично ток на участке DB также равен $3I_1 - I_2$.
- Сумма токов, входящих в узел E, должна совпадать с суммой токов, выходящих из этого узла, следовательно, ток на участке AE, а, следовательно, и на участке GB равен $9I + I_2$.

Изобразим все полученные токи на схеме:

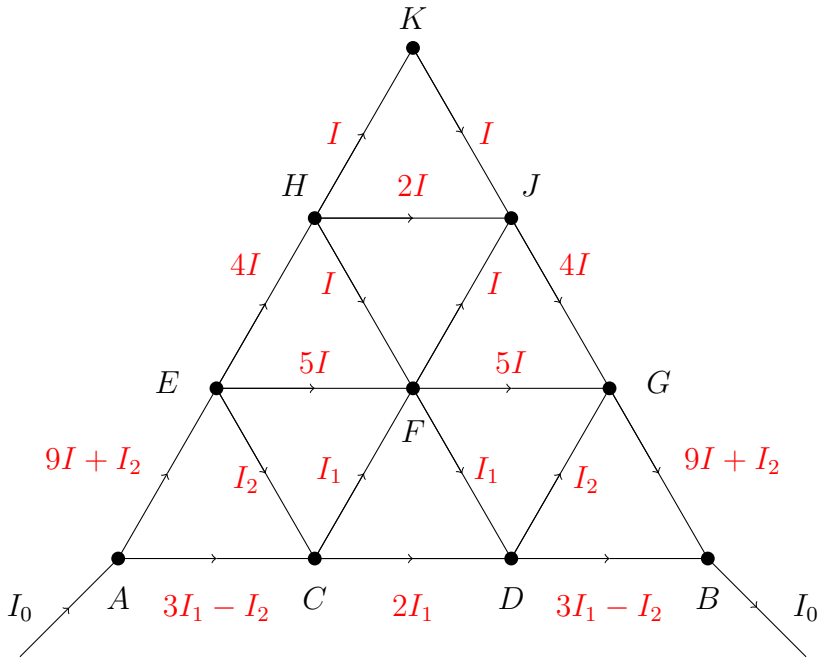


Рис. 23: Цепь–гирлянда с обозначением токов

Разница потенциалов между точками A и C:

$$U_{AC} = (9I + I_2)R + I_2R = (3I_1 - I_2)R. \tag{5}$$

Разница потенциалов между точками E и F:

$$U_{EF} = I_2R + I_1R = 5IR. \tag{6}$$

Составим из (5) и (6) систему уравнений и решим её относительно I_1 и I_2:

$$\begin{cases} 9I + I_2 + I_2 = 3I_1 - I_2; \\ I_2 + I_1 = 5I. \end{cases}$$

Получаем

$$I_1 = 4I;$$
$$I_2 = I.$$

Ток, поступающий в узел A:

$$I_0 = 9I + I_2 + 3I_1 - I_2 = 9I + 3I_1 = 21I.$$

Пусть U — разность потенциалов между точками A и B, R_{AB} — искомое сопротивление гирлянды, тогда с одной стороны,

$$U = I_0 R_{AB},$$

с другой стороны,

$$U = I_{AC}R + I_{CD}R + I_{DB}R = (3I_1 - I_2 + 2I_1 + 3I_1 - I_2)\,R = (8I_1 - 2I_2)\,R = 30IR.$$

Значит,

$$R_{AB} = \frac{30}{11}R = \frac{10}{7}R \approx 1{,}429R.$$

Ответ: $\frac{10}{7}R$.

2. По проспекту Ленина движется маршрутный автобус номер 26, за ним едет автобус номер 23, скорость которого на 2% больше. Водитель 23-го автобуса решает обогнать 26-й, но, когда оба автобуса оказываются бок о бок друг с другом, начинается правый поворот на переулок 1905 года (считайте, что поворот осуществляется по дугам окружностей). Как следствие, эти два транспортных средства движутся рядом друг с другом на всем протяжении кривой, в то время как позади них начинает скапливаться заметная пробка.

   Определите радиус кривой, по которой движется 23-й автобус, если расстояние между центрами полос движения составляет 3,75 м. Оба маршрутных автобуса в процессе всего поворота едут по центру своих полос.

   Решение

   В качестве скорости автобуса возьмём скорость его центра. Оба маршрутных автобуса едут по центру своих полос, тогда очевидно, что расстояние между ними составит $d =$ 3,75 м. Пусть скорость 26-го автобуса равна v, тогда скорость 23-го — kv, где $k = 1{,}02$. Радиусы правого и левого поворота дороги обозначим r и R соответственно, тогда

$$R = r + d.$$

   Поскольку на протяжении всего поворота маршрутные автобусы едут вровень друг с

другом, их угловые скорости равны:

$$\frac{v}{r} = \frac{kv}{R};$$
$$kr = R = r + d;$$
$$r = \frac{d}{k-1} \approx 187{,}5 \text{ метров.}$$

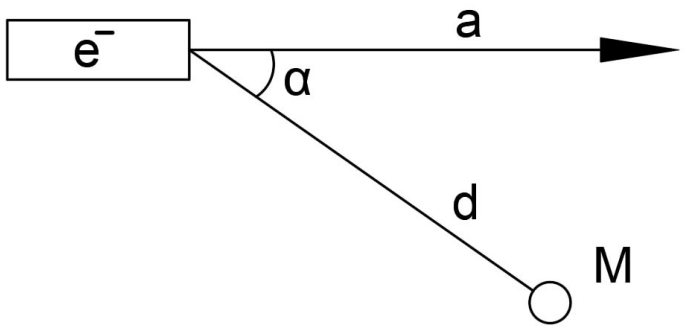
Значит, радиус поворота 23-го автобуса

$$R = r + d = 191{,}25 \text{ метра.}$$

Ответ: 191,25 метра.

3. Дедушка Теодора был физиком-экспериментатором и долгие годы копил у себя на чердаке различные приборы. В очередной раз копаясь в этих завалах, Теодор нашел электронную пушку. Он решил попрактиковаться в стрельбе по мишеням электронами. Для этого он разместил пушку и мишень M, как показано на рисунке. Далее он включил однородное магнитное поле так, чтобы магнитная индукция была перпендикулярна плоскости, образованной осью a и точкой M.

   Определите, какой по величине должна быть индукция, чтобы электрон попал точно в мишень M. Расстояние до мишени $d = 5$ см, угол $\alpha = 60°$, разгоняющее напряжение в пушке $U = 1000$ В, масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, а заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Влиянием гравитационного притяжения пренебречь.



Решение

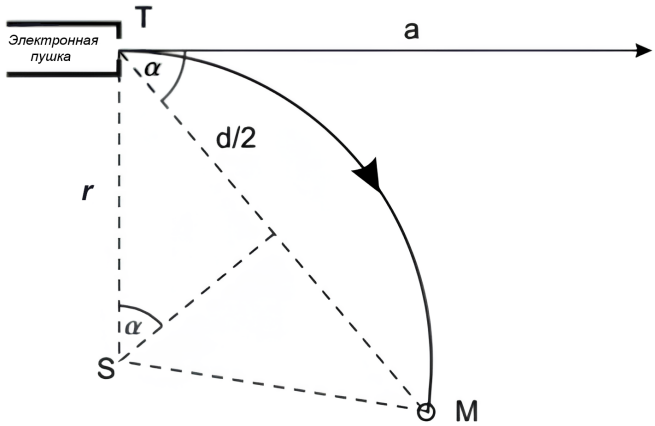


Рис. 24: Траектория движения электрона

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца:

$$Bev = \frac{m_e v^2}{r}.$$

Из геометрических соображений следует, что

$$r = \frac{d}{2\sin\alpha}.$$

Скорость определяется из кинетической энергии электронов:

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU.$$

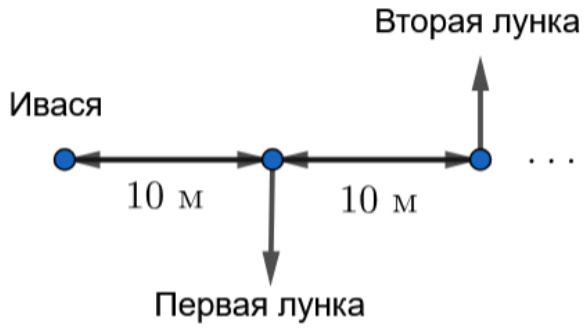
Объединяя все выражения, получим

$$B = 2\sqrt{\frac{2Um_e}{e}}\frac{\sin\alpha}{d} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ Тл.

4. Добродушный старичок Ивася любит играть в гольф. Перед Ивасей расположена последовательность лунок, каждая из которых находится на расстоянии 10 м от предыдущей, причём первая из них находится на расстоянии 10 м от Иваси.

   Определите наибольший номер лунки (начиная считать от Иваси), в которую может попасть старичок, если при ударе клюшкой шарику сообщается энергия 140 Дж. Масса шарика для гольфа равна 50 г, ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.



Потери энергии и вращение шарика вокруг собственной оси (в том числе эффект Магнуса) не учитывать. На рисунке изображён вид сверху.

Решение

Пусть E_0 — энергия, сообщённая мячику при ударе. Максимальная дальность полёта при движении под углом к горизонту может быть вычислена по формуле

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

где α — угол, под которым запускают мячик. Видно, что максимальная дальность полёта реализуется при $\alpha = 45°$ и

$$L \leq \frac{v_0^2}{g} = \frac{2E_0}{mg} = 560 \text{ м}.$$

Таким образом, Ивасе удастся попасть не дальше, чем в лунку № 56.

Ответ: лунка № 56.

5. У старичка Иваси есть кастрюля. Внутри кастрюли хранится 1 моль памятного идеального одноатомного газа, находящегося при температуре T_0. Закрыта кастрюля лёгким поршнем, который удерживается в неподвижном состоянии двумя одинаковыми кирпичами. На всякий случай Ивася хранит эту кастрюлю в вакууме на своём чердаке. Озорным внукам Иваси стало любопытно: как изменится температура газа в кастрюле, если один из кирпичей снять, а затем снова поставить обратно? Поршень может скользить в кастрюле без трения.

Решение

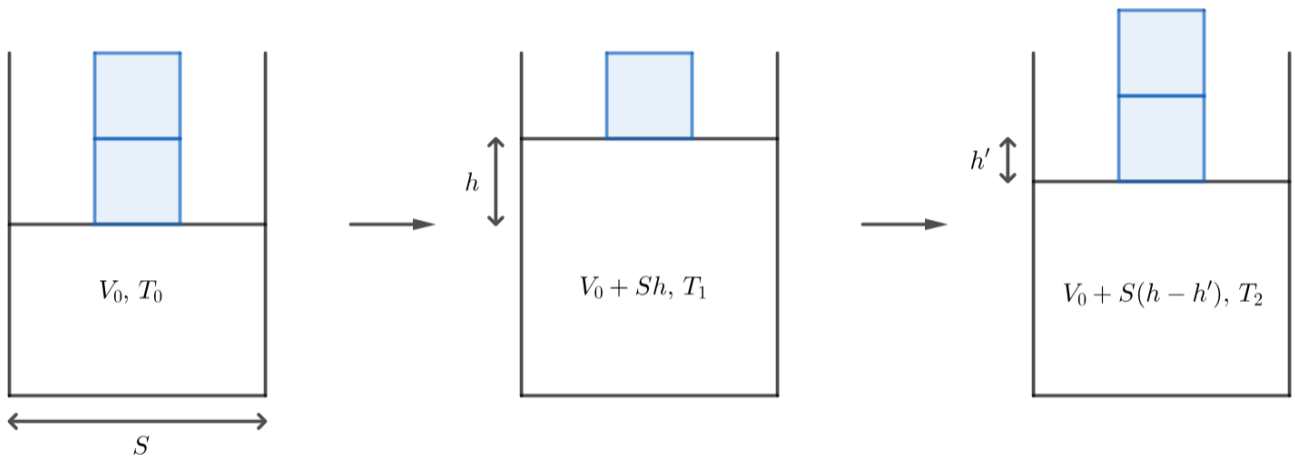


Рис. 25: Три состояния кастрюли с газом

При снятии одного из кирпичей газ адиабатически расширяется, поднимает крышку и совершает работу против силы тяжести:

$$A = mgh = -\Delta U = -\frac{3}{2}R(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}R(T_0 - T_1)\,.$$

Когда кирпич возвращают на место, над газом совершается работа, равная работе силы тяжести обоих кирпичей:

$$A' = -2mgh' = -\Delta U = -\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) \quad \Rightarrow \quad 2mgh' = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1)\,.$$

Запишем законы Менделеева–Клапейрона для всех трёх состояний газа:

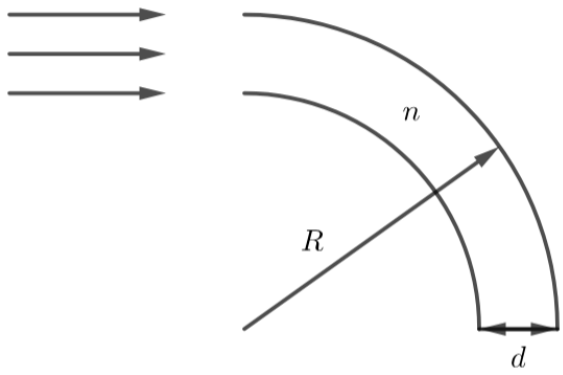
$$\begin{aligned}
&\frac{2mg}{S}V_0 = RT_0\,,\\
&\frac{mg}{S}(V_0 + Sh) = RT_1\,,\\
&\frac{2mg}{S}(V_0 + S(h - h')) = RT_2\,.
\end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\frac{mgV_0}{S} = \frac{RT_0}{2}\,, \quad 2mgh = \frac{3}{5}RT_0\,, \quad 2mgh' = \frac{12}{25}RT_0\,, \quad T_1 = \frac{4}{5}T_0\,, \quad T_2 = \frac{28}{25}T_0\,.$$

Ответ: $\frac{28}{25}T_0$.

6. Умудрённый опытом дедушка Ивася решил показать фокус внукам. Для этого он в своём гараже соорудил изогнутую трубку из материала с показателем преломления $n = 2{,}6$ в виде части диска толщиной $d = 2$ мм. Определите наименьший внешний радиус трубки R, при котором попавшие внутрь лучи не покинут её и продолжат распространяться внутри. До того как попасть в трубку, свет распространяется в воздухе.



Решение

Луч будет распространяться внутри световода, если при отражении от его поверхности выполняется условие полного внутреннего отражения. Рассмотрим первое соударение со внешней поверхностью световода; очевидно, что достаточно записать условие полного внутреннего отражения только для нижнего луча:

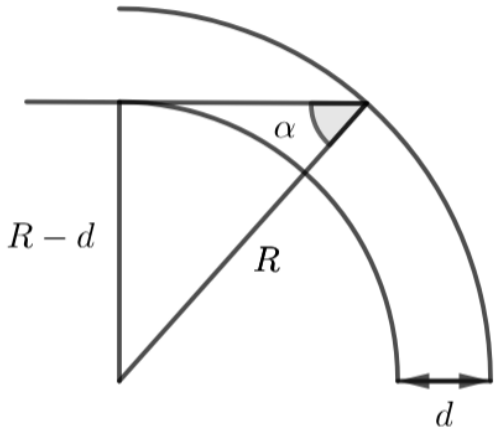


Рис. 26: Первое отражение луча от внешней поверхности световода

$$\sin\alpha = \frac{R-d}{R} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{n}{n-1}d = 3{,}25 \text{ мм.}$$

Можно непосредственным вычислением убедиться, что повторного соударения о стенки световода на этом участке не будет (см. примечание ниже).

Ответ: 3,25 мм.

Примечание. Обратим внимание на рисунок ниже: из соображений симметрии несложно видеть, что, если форма световода, например, сферическая, то лучи касательны внутренней сфере радиусом $R - d$. Следовательно, отражение происходит только от внешней стенки, причём с постоянным углом падения. Таким образом, условие полного внутреннего отражения можно рассмотреть только для первого отражения. Если форма световода далее цилиндрическая, то выполнение условия полного внутреннего отражения при всех последующих отражениях очевидно.

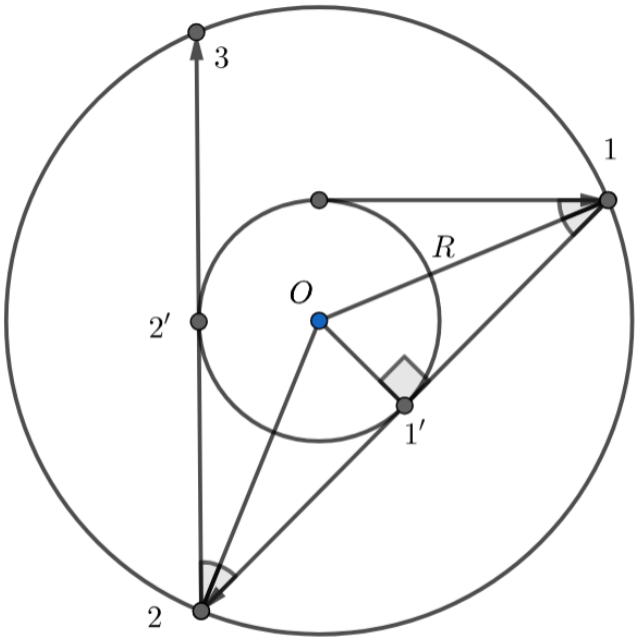
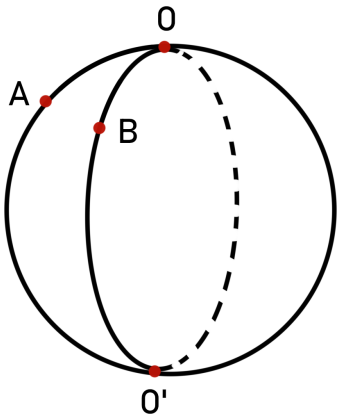


Рис. 27: Повторные отражения луча от внешней стенки световода

5 Старшая вторая лига

1. Найдите функцию $r(l)$, где r — сопротивление между точками A и B фигуры из двух металлических колец равного радиуса, изображённой на рисунке; l — длина дуги OA, $OA = OB$. Сопротивление дуги длиной 1 метр равно ρ, радиус колец равен a.



Решение

Обозначим сопротивление полуокружности как $R = \rho\pi a$, а сопротивление участка дуги длиной l — $r = \rho l$. Нарисуем эквивалентную схему.

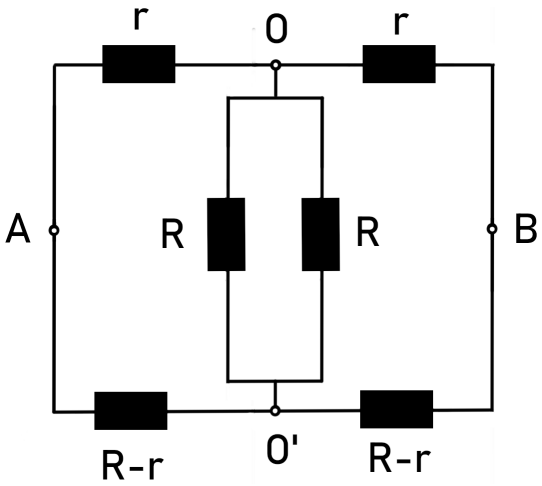


Рис. 28: Эквивалентная схема

Так как точки O и O' лежат на оси симметрии схемы, потенциал в них одинаковый, и ток по параллельным сопротивлениям R течь не будет. Это позволяет перерисовать схему в более удобном виде.

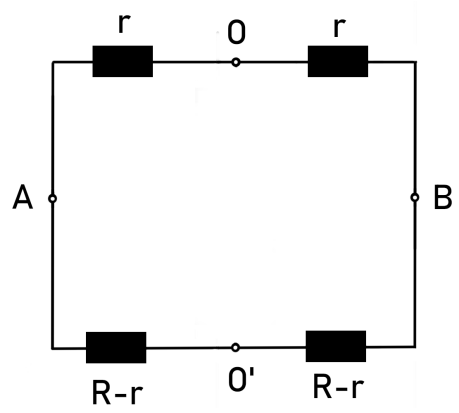


Рис. 29: Цепь с рис. 28 без участка OO'

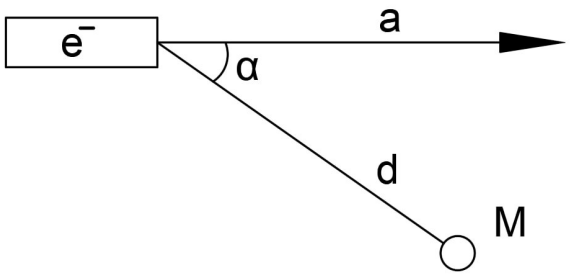
Теперь нетрудно вычислить её полное сопротивление:

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2(R-r)}\right)^{-1} = \frac{2r(R-r)}{R} = \frac{2\rho l(\pi a - l)}{\pi a}.$$

Ответ: $R_{AB} = \dfrac{2\rho l(\pi a - l)}{\pi a}$.

2. Дедушка Теодора был физиком-экспериментатором и долгие годы копил у себя на чердаке различные приборы. В очередной раз копаясь в этих завалах, Теодор нашел электронную пушку. Он решил попрактиковаться в стрельбе по мишеням электронами. Для этого он разместил пушку и мишень M, как показано на рисунке. Далее он включил однородное магнитное поле так, чтобы магнитная индукция была перпендикулярна плоскости, образованной осью a и точкой M.

   Определите, какой по величине должна быть индукция, чтобы электрон попал точно в мишень M. Расстояние до мишени $d = 5$ см, угол $\alpha = 60°$, разгоняющее напряжение в пушке $U = 1000$ В, масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, а заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Влиянием гравитационного притяжения пренебречь.



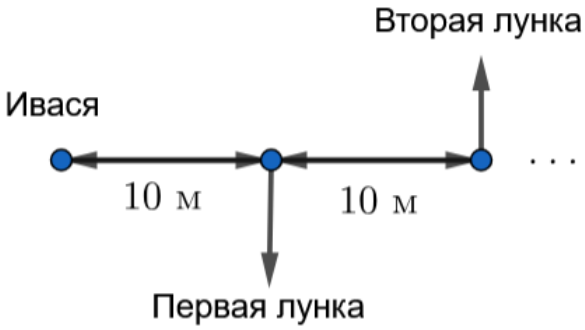
Решение задачи приведено на странице 41.

3. По проспекту Ленина движется маршрутный автобус номер 26, за ним едет автобус номер 23, скорость которого на 2% больше. Водитель 23-го автобуса решает обогнать 26-й, но, когда оба автобуса оказываются бок о бок друг с другом, начинается правый поворот на переулок 1905 года (считайте, что поворот осуществляется по дугам окружностей). Как следствие, эти два транспортных средства движутся рядом друг с другом на всем протяжении кривой, в то время как позади них начинает скапливаться заметная пробка.

   Определите радиус кривой, по которой движется 23-й автобус, если расстояние между центрами полос движения составляет 3,75 м. Оба маршрутных автобуса в процессе всего поворота едут по центру своих полос.

   Решение задачи приведено на странице 39.

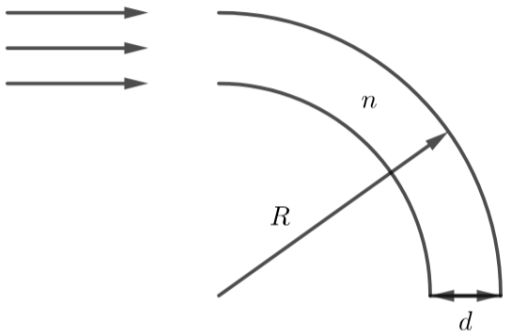
4. Добродушный старичок Ивася любит играть в гольф. Перед Ивасей расположена последовательность лунок, каждая из которых находится на расстоянии 10 м от предыдущей, причём первая из них находится на расстоянии 10 м от Иваси.



   Определите наибольший номер лунки (начиная считать от Иваси), в которую может попасть старичок, если при ударе клюшкой шарику сообщается энергия 140 Дж. Масса шарика для гольфа равна 50 г, ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Потери энергии и вращение шарика вокруг собственной оси (в том числе эффект Магнуса) не учитывать. На рисунке изображён вид сверху.

   Решение задачи приведено на странице 42.

5. Умудрённый опытом дедушка Ивася решил показать фокус внукам. Для этого он соорудил изогнутую трубку из материала с показателем преломления $n = 2{,}6$ в виде части диска толщиной $d = 2$ мм. Определите наименьший внешний радиус трубки R, при котором попавшие внутрь лучи не покинут её и продолжат распространяться внутри. До того как попасть в трубку, свет распространяется в воздухе.



Решение задачи приведено на странице 44.

6. Олег очень любит пить чай, когда играет в «Ведьмака», и потому у него есть четырёхлитровый чайник со свистком. Он наполнил его холодной воды ($15°C$) до краёв, поставил чайник на плиту и ушёл играть дальше. Через 10 минут упорного боссфайта прозвучал свисток. Определите, на какое время после начала свиста чайника Олег может задержаться и добить босса, чтобы по приходу на кухню ему хватило воды на одну чашку чая (250 мл).

Теплообменом со средой пренебречь. Удельная теплота парообразования воды $L_в = 2260$ кДж/кг, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · К), плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, температура кипения воды $t_0 = 100°C$.

Решение

Для нагревания воды необходимо количество теплоты

$$Q_1 = m_1 c_в (t_0 - t_1) = V_1 \rho_в c_в (t_0 - t_1),$$

где m_1, t_1 , V_1 — масса, температура и объём воды в чайнике сразу после заливания воды.

Для испарения потребуется

$$Q_2 = m_2 L_в = (V_1 - V_3)\rho_в L_в,$$

где m_2 — масса испарённой воды, V_3 — объём воды в чашке.

Мощность чайника неизменна:

$$\frac{Q_1}{\tau_1} = \frac{Q_2}{\tau_2},$$

где τ_1 — время до начала свиста чайника, τ_2 — время, на которое Олег может задержаться. Выразим из этого соотношения τ_2:

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{Q_2}{Q_1} = \tau_1 \frac{(V_1 - V_3)\rho_{\text{в}} L_{\text{в}}}{V_1 \rho_{\text{в}} c_{\text{в}} (t_0 - t_1)} = \tau_1 \frac{(V_1 - V_3) L_{\text{в}}}{V_1 c_{\text{в}} (t_0 - t_1)} = 59{,}4 \text{ мин.}$$

Ответ: 59,4 мин.

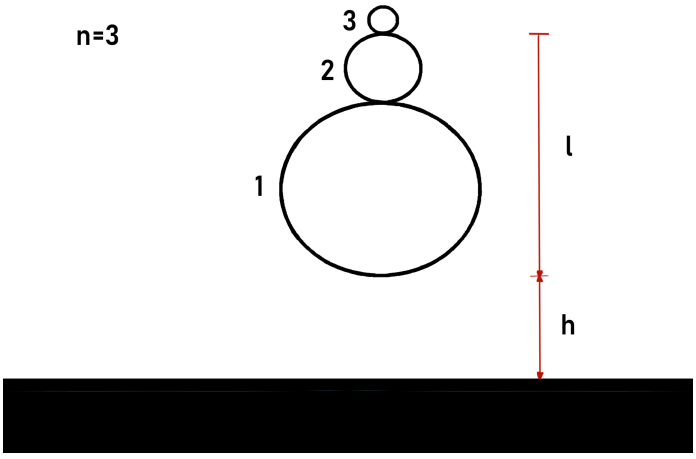
8 декабря 2024 года

6 Старшая высшая лига. Финал

1. Как-то раз, наблюдая за игрой в мяч, Теодор задумался, что будет, если положить маленький теннисный мяч поверх футбольного, а поверх теннисного положить ещё более маленький мячик и так n мячей, а потом как уронить всю эту конструкцию с высоты $h = 1$ м от нижнего края самого большого мяча. Больше всего Теодора в его мысленном эксперименте заинтересовала судьба самого маленького мячика на самом верху сей конструкции — как высоко он, должно быть, подпрыгнет.

   Помогите Теодору понять, при каком n верхний мячик сможет достичь высоты в 1 км.

   Центры мячей расположены строго на одной вертикальной линии. Нижняя точка самого верхнего мяча находится на высоте $h + l$ над землёй. $g = 9{,}8$ м/с^2. Фантазия Теодора позволяет пренебречь сопротивлением воздуха и считать все столкновения упругими. Также она позволяет считать, что масса первого и самого большого мяча m_1 намного больше массы второго m_2, которая намного больше массы третьего m_3 и т. д. l он считает пренебрежимо малым.



Решение

Для начала заметим, что в момент касания поверхности земли первым мячом все мячи двигаются с одинаковой скоростью:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

С этой же скоростью самый большой мяч полетит навстречу второму уже после столкновения с землёй. Рассмотрим столкновение первого и второго мячей, запишем законы сохранения импульсов и энергии:

$$\begin{cases} m_1 v - m_2 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 & (OY), \\ \dfrac{1}{2} m_1 v^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v^2 = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2, \end{cases}$$

где v_1, v_2 — скорости первого и второго мячей соответственно после столкновения.

$$\begin{cases} m_1(v - v_1) = m_2(v_2 + v), \\ m_1(v^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v^2), \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое:

$$v + v_1 = v_2 - v \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 - 2v$$

Подставляя, получим

$$v_2 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{3 - \dfrac{m_2}{m_1}}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} v.$$

Учитывая, что $\dfrac{m_2}{m_1} \to 0$, получим скорость второго мяча после столкновения — $v_2 = 3v$. Рассмотрим столкновение второго и третьего мячей, аналогично запишем:

$$\begin{cases} m_2 3v - m_3 v = m_2 v_2' + m_3 v_3 & (OY), \\ \dfrac{1}{2} m_2 9v^2 + \dfrac{1}{2} m_3 v^2 = \dfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \dfrac{1}{2} m_3 v_3^2, \end{cases}$$

где v_2', v_3 — скорости второго и третьего мячей соответственно после столкновения.

Решая систему, получим

$$v_3 = 7v.$$

Можно заметить, что выражение для скорости n-го мяча после столкновения примет вид:

$$v_n = (2^n - 1)v.$$

Выразим высоту, на которую поднимется n-й мяч (самый верхний):

$$\frac{1}{2}m_n v_n^2 = m_n g H',$$

где H' — высота от начального положения последнего мяча, на которую тот поднимется после столкновения. Итоговая высота тогда равна

$$H = l + \frac{\Big((2^n - 1)v\Big)^2}{2g} = l + (2^n - 1)^2 h.$$

Подставляя $h = 1$ м, $H = 1000$ м, а также воспользовавшись тем, что l пренебрежимо мало, получим условие на n:

$$2^n - 1 > \sqrt{1000}.$$

Пяти мячей будет недостаточно, но шести уже хватит: в данном случае высота будет достигать почти четырёх километров.

Ответ: $n = 6$.

Комментарий. Вместо решения системы уравнений командами было предложено следующее решение для нахождения скоростей мячей после соударения.

Для определения скорости второго мяча после столкновения с первым перейдём в систему отсчёта (СО) первого мяча. В момент соударения первый мяч будет покоиться, а второй мяч будет двигаться ему навстречу со скоростью $2v$. Так как масса первого мяча m_1 много больше массы второго m_2, то после соударения второй мяч будет иметь скорость $2v$ в обратном направлении. При переходе в СО земли имеем скорость второго шарика $v_2 = 3v$.

Аналогично для соударения второго и третьего мячей. В СО второго мяча перед соударением третий мяч движется со скоростью $v + 3v = 4v$, поле соударения с той же скоростью в обратном направлении. В СО земли $v_3 = 3v + 4v = 7v$.

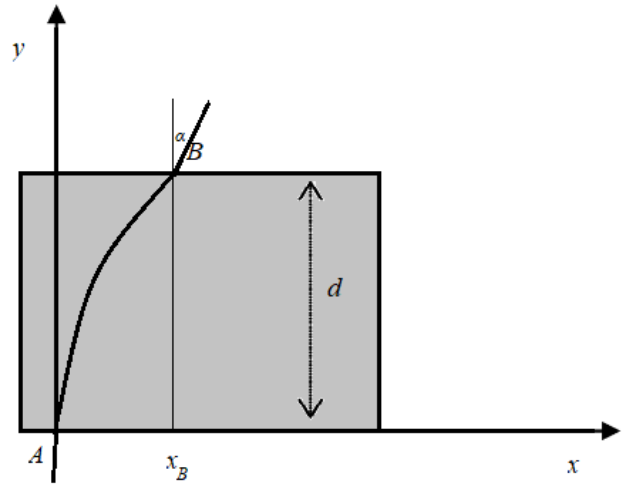
2. В гараже у дедушки Теодор наткнулся на пластину с любопытным свойством. А именно, Теодор заметил, что её коэффициент преломления подчиняется закону

$$n = \frac{n_0}{1 - x/R},$$

где $n_0 = 1{,}2$, $R = 13$ см. Посветив на пластину в точку $A(x_A = 0)$, так чтобы луч падал практически перпендикулярно, но при этом отклонялся, Теодор увидел, что луч

выходит в точке B под углом $\alpha = 30°$. Исходя из этого, он заключил, что можно найти толщину d пластинки без использования линейки.

От вас требуется найти d, а также найти расстояние от оси OY до точки B. Показатель преломления воздуха равен 1.



Решение

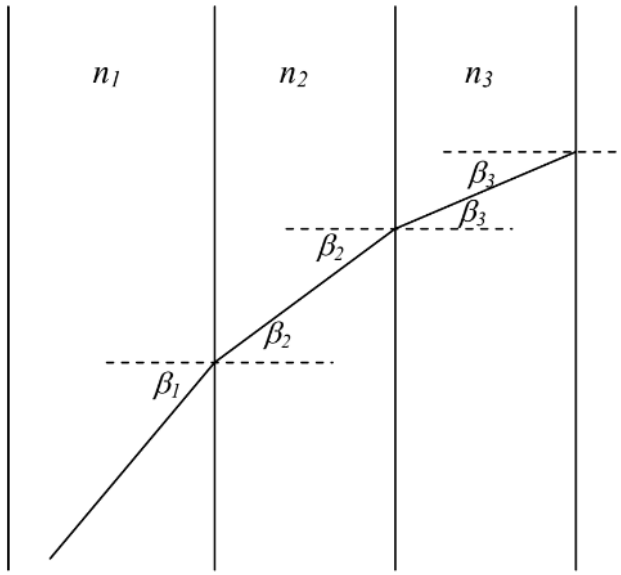


Рис. 30: Разбиение пластинки на части.
Преломление луча на границах этих частей

Разобьём пластинку на секции, как показано на рисунке 30, и применим к каждой границе закон Снеллиуса. Тогда несложно увидеть, что внутри пластинки верно $n_i \sin \beta_i =$

const. Так как это свойство не зависит от толщины секции, оно верно и для непрерывного изменения коэффициента преломления. Поэтому

$$n_A \sin(\beta_A) = n_B \sin(\beta_B).$$

Тогда, подставляя данные из условия:

$$n_0 = n_B \sin(\beta_B).$$

Применим закон Снеллиуса к самой точке B:

$$n_B = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(90^\circ - \beta_B)}.$$

Комбинируя последние два уравнения, получим

$$n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2(\alpha)} = 1{,}3.$$

Теперь, используя зависимость показателя преломления из условия, найдём

$$x_B = R\left(1 - \frac{n_0}{n_B}\right) = 1 \text{ см}.$$

Для ответа на последний вопрос заметим, что из вышесказанного следует закон

$$n(x) \sin\beta(x) = n_0,$$

иначе говоря,

$$\sin\beta(x) = \frac{R - x}{R}.$$

Заметим, что $\beta(x)$ есть не что иное, как угол наклона касательной к траектории в точке x. Соответственно, верно следующее:

$$y'(x) = \operatorname{tg}\beta(x).$$

Таким образом, можно найти явно траекторию светового луча в пластинке. Выражая $\operatorname{tg}\beta(x)$ явно через x, получим

$$y'(x) = \frac{R - x}{\sqrt{R^2 - (R - x)^2}} = (\sqrt{R^2 - (R - x)^2})'.$$

Таким образом,

$$y(x) = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} + const.$$

Константа находится благодаря точке A, толщина $d = y(x_B)$. Имеем

$$y(x_B) = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ см}.$$

Ответ: $x_B = 1$ см, $d = 5$ см.

3. Как-то раз Теодора позвали на демонстрацию ряда экспериментов в местную физическую лабораторию. В рамках одной демонстрации была произведена серия манипуляций над водородом и ртутью. В длинную пробирку с плоским основанием и площадью поперечного сечения $S = 1$ см^2 накачали некоторое количество водорода. Затем пробирку открытым концом погрузили вертикально в сосуд с ртутью, а всю конструкцию поместили в теплоизолированный контейнер с воздухом. Условия внутри контейнера $T_0 = 273$ К и $P_0 = 1{,}334 \cdot 10^5$ Па. Оказалось, что ртуть поднялась внутрь трубки с водородом на высоту $h_0 = 0{,}7$ м относительно уровня ртути в сосуде.

   Одна из стенок контейнера представляет собой поршень, который отодвигают, тем самым изотермически уменьшая давление воздуха до $P_1 = 8 \cdot 10^4$ Па. В результате высота столба ртути в пробирке уменьшилась до $h_1 = 0{,}4$ м. После этого, зафиксировав поршень, контейнер нагрели до температуры T_2, при которой столбик ртути достиг отметки $h_2 = 0{,}5$ м. Наконец, после изобарического расширения воздуха в контейнере, уровень ртути остановился на высоте $h_3 = 0{,}45$ м относительно уровня ртути в сосуде.

   При условии, что система все время находилась в тепловом и механическом равновесии, определите давление P водорода в конечном состоянии системы.

   Указание. Считать, что тепловое расширение ртути подчиняется закону

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)),$$

   где $\rho_0 = 1{,}36 \cdot 10^4$кг/м^3 — плотность ртути при температуре T_0, а $\beta = 1{,}84 \cdot 10^{-4}$К$^{-1}$ — объёмный коэффициент расширения ртути. Тепловым расширением пробирки и изменением высоты ртути в сосуде пренебречь.

Решение

Путь H — высота пробирки относительно уровня ртути в сосуде, а h_i — высота столбика ртути в пробирке. При механическом равновесии давление водорода в пробирке

$$P_{H_2,i} = P_{\text{воздух}} - \rho_i g h_i,$$

где ρ_i — плотность ртути при температуре T_i:

$$\rho_i = \rho_0(1 - \beta(T_i - 273)),$$

где ρ_0 — плотность ртути при $T_0 = 273$К. Объём водорода определяется как

$$V_i = S(H - h_i).$$

Уравнения состояния для водорода для каждого из процессов:

$$\begin{aligned}
(P_0 - \rho_0 g h_0)S(H - h_0) &= \frac{m}{M}RT_0;\\
(P_1 - \rho_0 g h_1)S(H - h_1) &= \frac{m}{M}RT_0;\\
(P_2 - \rho_2 g h_2)S(H - h_2) &= \frac{m}{M}RT_2;\\
(P_3 - \rho_3 g h_3)S(H - h_3) &= \frac{m}{M}RT_3,
\end{aligned}$$

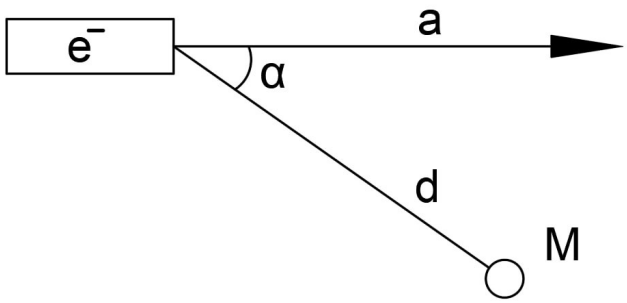
где $P_2 = \dfrac{P_1 T_2}{T_0}$, $P_3 = P_2$. Из этой системы уравнений можно получить:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{Ch_0 - h_1}{C - 1} = 1{,}3 \text{ м, где} \quad C = \frac{P_0 - \rho_0 g h_0}{P_1 - \rho_0 g h_1} = 1{,}5;\\
m &= \frac{MS(H - h_0)(P_0 - \rho_0 g h_0)}{RT_0} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ кг};\\
T_2 &= \frac{\rho_0 g h_2(1 + \beta T_0)}{\dfrac{P_1}{T_0} - \dfrac{m}{M}\dfrac{R}{V_2} + \beta\rho_0 g h_2} \approx 358 \text{ К};\\
T_3 &= \frac{\dfrac{P_1 T_2}{T_0} - \rho_0 g h_3(1 + \beta T_0)}{\dfrac{m}{M}\dfrac{R}{V_3} - \beta\rho_0 g h_3} \approx 458 \text{ К};\\
P &= P_3 - \rho_3 g h_3 = \frac{P_1 T_2}{T_0} - g h_3 \rho_0(1 - \beta(T_3 - T_0)) \approx 4{,}4 \cdot 10^4 \text{ Па}.
\end{aligned}$$

Ответ: $P = 4{,}4 \cdot 10^4$ Па.

4. Дедушка Теодора был физиком-экспериментатором и долгие годы копил у себя на чердаке различные приборы. В очередной раз копаясь в этих завалах, Теодор нашел электронную пушку. Он решил попрактиковаться в стрельбе по мишеням электронами. Для этого он разместил пушку и мишень M, как показано на рисунке. Далее он включил

однородное магнитное поле так, чтобы магнитная индукция была параллельна отрезку, соединяющему выходное отверстие пушки и мишень. Определите, какой по величине должна быть индукция, чтобы электрон попал точно в мишень M. Расстояние до мишени $d = 5$ см, угол $\alpha = 60°$, разгоняющее напряжение в пушке $U = 1000$ В, масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Влиянием гравитационного притяжения пренебречь.



Решение

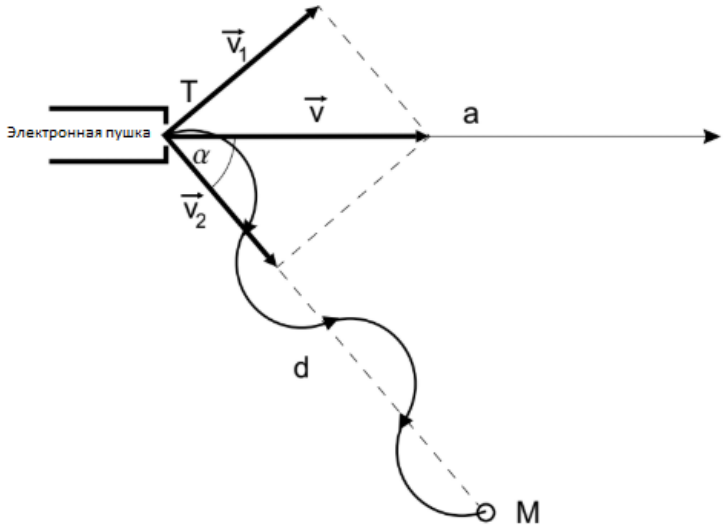


Рис. 31: Траектория движения электрона

При заданной конфигурации поля электрон будет двигаться по спиральной траектории вдоль оси TM, то есть электроны будут двигаться равномерно по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и будут двигаться равномерно прямолинейно

вдоль магнитного поля. Спроецируем начальную скорость на ось TM ($\vec{v}_2$) и на ось, перпендикулярную ей ($\vec{v}_1$). Соответственно, компонента $\vec{v}_1$ будет менять своё направление из-за силы Лоренца, она будет вращаться равномерно по окружности. Компонента $\vec{v}_2$ будет оставаться постоянной. Их модули соответственно равны

$$v_1 = v\sin\alpha, \qquad v_2 = v\cos\alpha.$$

Пусть N — число витков спирали, тогда

$$t = \frac{d}{v_2} = \frac{d}{v\cos\alpha} = \frac{2\pi r N}{v_1} = \frac{2\pi r N}{v\sin\alpha}.$$

Соответственно, радиус спиральной траектории

$$r = \frac{d\sin\alpha}{2\pi N\cos\alpha}.$$

Сила Лоренца равна центростремительной:

$$Bev\sin\alpha = \frac{m_e v^2\sin^2\alpha}{r}.$$

Скорость электрона найдём из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU.$$

Подставим r и выразим индукцию, получим

$$B = \frac{2\pi N m_e v\cos\alpha}{de} = \frac{2\pi N\cos\alpha}{d}\sqrt{\frac{2Um_e}{e}}$$

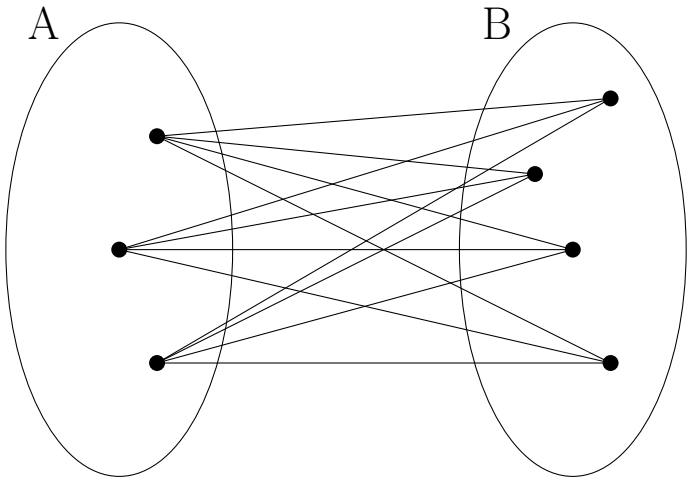
Подставив числа, имеем

$$B_N = N\cdot 6{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{Тл}.$$

Несложно убедиться, что $B_1 = 6{,}7\cdot 10^{-3}$ Тл и $B_2 = 13{,}4\cdot 10^{-3}$ Тл меньше B_{max} и, соответственно, экспериментатор сможет попасть электроном в мишень.

Ответ: электрон попадёт в мишень M при индукции $B_1 = 6{,}7\cdot 10^{-3}$ Тл или $B_2 = 13{,}4\cdot 10^{-3}$ Тл.

5. Представим в пространстве две группы узлов: A и B. В группе A — a узлов, в группе B — b узлов. Каждый узел группы A подключается к каждому узлу группы B резистором с сопротивлением R.



На рисунке для примера изображён случай, когда $a = 3$, $b = 4$.

Каким будет результирующее сопротивление между двумя узлами из разных групп при любых a и b?

Решение

Обозначим узлы из группы A $A_1, A_2, \ldots, A_a$, а узлы из группы B — $B_1, B_2, \ldots, B_b$.

Если две точки цепи имеют одинаковый потенциал, ток между ними не течёт, даже если они соединены проводом или резистором. Если в цепи есть две точки, в которые и из которых текут одинаковые токи, эти точки симметричны и ничего не изменится, если их поменять местами, то они имеют одинаковый потенциал.

Найдём сопротивление между узлами A_1 и B_1. Если мы внимательно посмотрим на схему, то обнаружим, что точки $B_2, B_3, \ldots, B_b$ имеют одинаковый потенциал — если, например, мы поменяем местами точки B_{42} и B_{47}, ситуация в цепи не изменится. То же самое относится и к точкам $A_2, A_3, \ldots, A_a$ — они тоже все имеют одинаковый потенциал. Мы можем соединить все точки с одинаковым потенциалом в один узел. Давайте посмотрим, во что превратится схема, если мы отделим узлы A_1 и B_1, а остальные узлы с одинаковым потенциалом объединим.

На рисунке 32 эллипс B' представляет собой объединение узлов $B_2, B_3, \ldots, B_b$, то есть содержит $(b-1)$ исходный узел; эллипс A' — объединение узлов $A_2, A_3, \ldots, A_a$, то есть содержит $(a-1)$ исходный узел. Один резистор подключается между узлами A_1 и B_1, $(b-1)$ резисторов между узлами A_1 и B', и, наконец, $(a-1)$ резистор между узлами B_1 и A'. Узлы A' и B' соединяет $(a-1)(b-1)$ резистор.

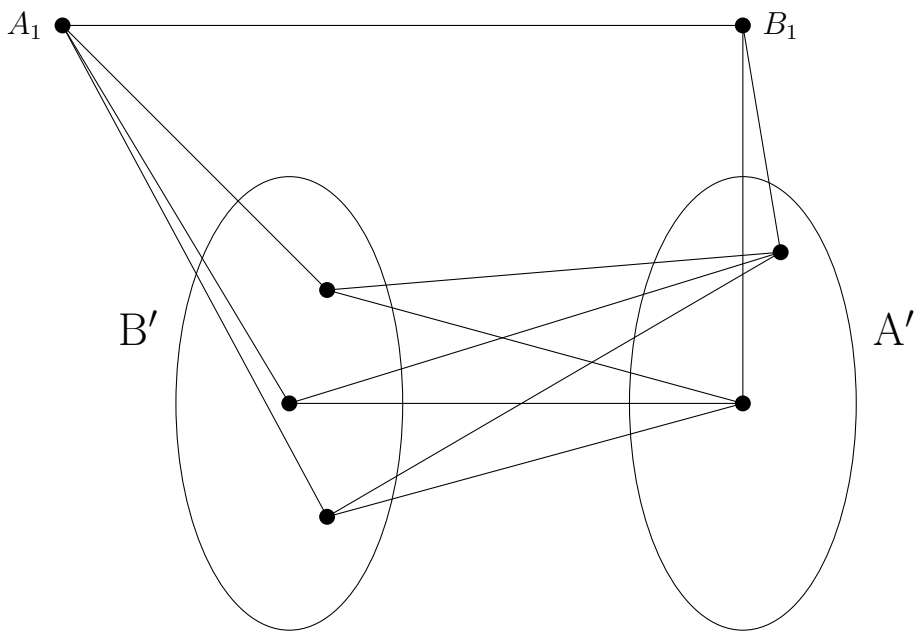


Рис. 32: Схема с отделёнными узлами A_1 и B_1 для $a = 3$, $b = 4$

Можно просто сказать, что между A_1 и B_1 есть две параллельные ветви: одна с сопротивлением R, другая, более сложная, с неизвестным нам сопротивлением R_x:

$$R_{AB} = \frac{RR_x}{R + R_x}. \tag{7}$$

Сопротивление R_x представляет собой соединённые последовательно три параллельные группы резисторов:

- резисторы, соединяющие A_1 и B';
- резисторы, соединяющие B_1 и A';
- резисторы, соединяющие A' и B'.

Тогда

$$R_x = \frac{R}{b-1} + \frac{R}{(a-1)(b-1)} + \frac{R}{a-1}.$$

Приведём это выражение к общему знаменателю:

$$R_x = \frac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R.$$

Остаётся подставить R_x в (7):

$$R_{AB} = \frac{R\dfrac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R}{R + \dfrac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R} = R\frac{a+b-1}{ab}.$$

Очевидно, что сопротивление между двумя любыми другими узлами из групп A и B такое же.

Ответ: $R_{AB} = R\dfrac{a+b-1}{ab}$, $R_{AA} = \dfrac{2R}{b}$, $R_{BB} = \dfrac{2R}{a}$.

6. Теодор и Соня очень любят придумывать, а затем проверять физические гипотезы. В этот раз они подвесили один мячик радиуса $r = 1$ см на нерастяжимой нити. Ещё один такой же мячик они положили на теплоизолированную горизонтальную поверхность. После этого они сообщили каждому мячику равное количество теплоты $Q = 5$ кДж и замерили их конечные температуры. Различны ли в результате их температуры? Если да, то насколько.

Указание. Температурный коэффициент линейного расширения материала мячиков $\beta = 2{,}34 \cdot 10^{-4}$ °C^{-1}, удельная теплоёмкость $C = 1{,}5\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{г °C}}$, плотность $\rho = 1{,}19$ г/см^3. Тепловыми потерями пренебречь.

Комментарий. В ходе решения задач было также сообщено, что мячики однородны.

Решение

Пусть A — мячик, лежащий на плоскости, а B — подвешенный на нити. При передаче тепла мячики нагреваются и расширяются, при этом перемещаются их центры масс. Соответственно меняется потенциальная энергия в гравитационном поле: у мячика B она уменьшается, а у лежащего на плоскости — увеличивается. То есть, согласно первому началу термодинамики, для подвешенного мячика часть потенциальной энергии перешла в нагревание, а для мячика, лежащего на плоскости, часть переданного тепла перешла на изменение потенциальной энергии. Соответственно, в итоге температура подвешенного шара должна быть больше, чем у лежащего на плоскости. Количество тепла, связанное с изменением температуры каждого мячика:

$$Q_i = mC\Delta t_i,\ i = A,\, B,$$

где $m = \dfrac{4}{3}\pi\rho r^3$. Изменение потенциальной энергии:

$$\Delta E_i = mgr\beta\Delta t_i.$$

Тогда имеем следующую систему уравнений в соответствии с первым началом термо-

динамики:

$$Q = Q_A + \Delta E_A,$$
$$Q = Q_B - \Delta E_B.$$

Подставив явные выражения, получим

$$Q = m\Delta t_A(C + gr\beta),$$
$$Q = m\Delta t_B(C - gr\beta).$$

Отсюда имеем

$$\Delta t = \Delta t_B - \Delta t_A = \frac{Q}{m}\frac{2gr\beta}{C^2 - g^2r^2\beta^2} = \frac{3Q}{2\pi\rho r^2}\frac{g\beta}{C^2 - g^2r^2\beta^2} \approx 2 \cdot 10^{-5}\ ^\circ\text{C}.$$

Ответ: $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}\ ^\circ$C.

Комментарий. В реальности разница температур будет другая, так как при анализе такого процесса нельзя считать теплоёмкость постоянной.

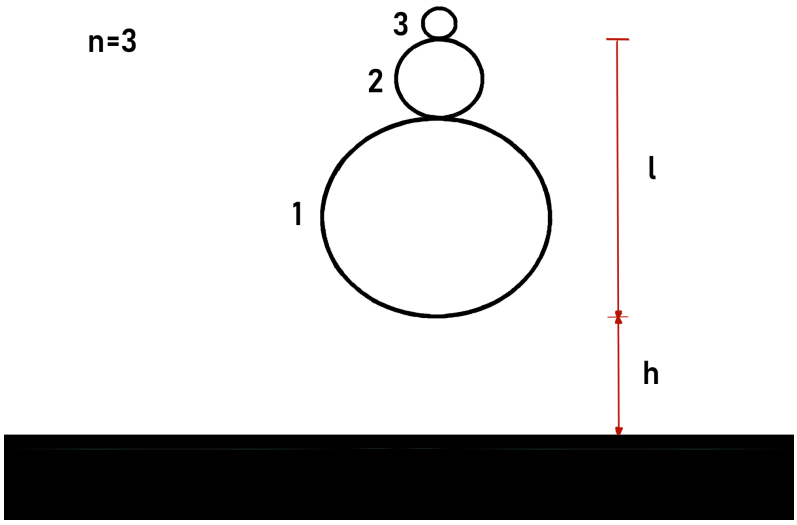
Giacomo De Palma, Mattia C. Sormani, Counterintuitive effect of gravity on the heat capacity of a solid sphere: Re-examination of a well-known problem, American Journal of Physics 83, 723 (2015). `https://arxiv.org/pdf/1502.01337`

7 Старшая высшая лига. Бой за 3 место

1. Как-то раз, наблюдая за игрой в мяч, Теодор задумался, что будет, если положить маленький теннисный мяч поверх футбольного, а поверх теннисного положить ещё более маленький мячик и так n мячей, а потом как уронить всю эту конструкцию с высоты $h = 1$ м от нижнего края самого большого мяча. Больше всего Теодора в его мысленном эксперименте заинтересовала судьба самого маленького мячика на самом верху сей конструкции — как высоко он, должно быть, подпрыгнет.

   Помогите Теодору понять, при каком n верхний мячик сможет достичь высоты в 1 км.

   Центры мячей расположены строго на одной вертикальной линии. Нижняя точка самого верхнего мяча находится на высоте $h + l$ над землёй. $g = 9{,}8$ м/с^2. Фантазия Теодора позволяет пренебречь сопротивлением воздуха и считать все столкновения упругими. Также она позволяет считать, что масса первого и самого большого мяча m_1 намного больше массы второго m_2, которая намного больше массы третьего m_3 и т. д. l он считает пренебрежимо малым.



   Решение задачи приведено на странице 52.

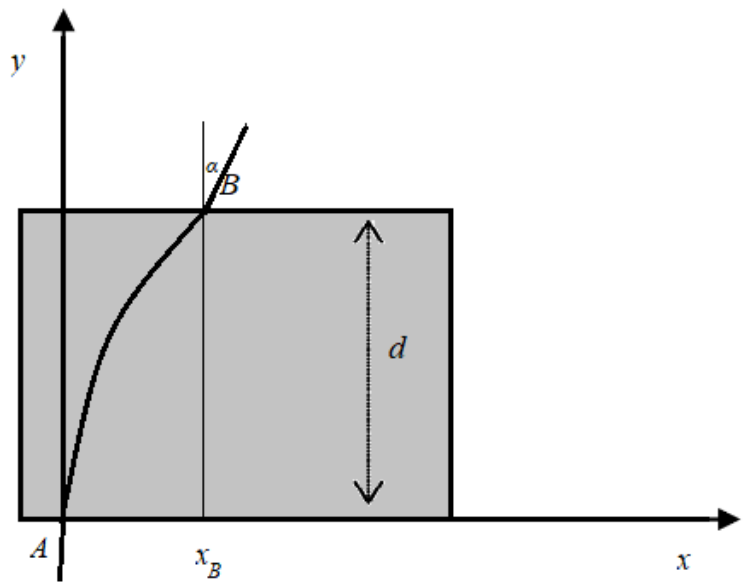
2. В гараже у дедушки Теодор наткнулся на пластину с любопытным свойством. А именно,

Теодор заметил, что её коэффициент преломления подчиняется закону

$$n = \frac{n_0}{1 - x/R},$$

где $n_0 = 1{,}2$, $R = 13$ см. Посветив на пластину в точку $A(x_A = 0)$, так чтобы луч падал практически перпендикулярно, но при этом отклонялся, Теодор увидел, что луч выходит в точке B под углом $\alpha = 30°$. Исходя из этого он заключил, что можно найти толщину d пластинки без использования линейки.

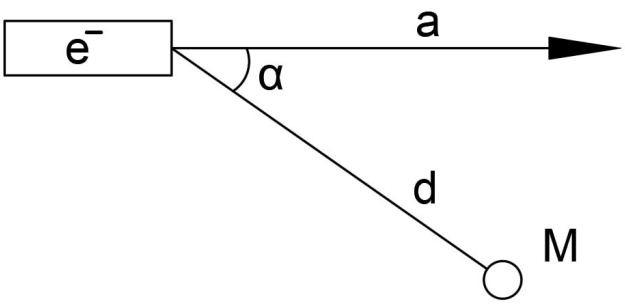
От вас требуется найти d, а также найти расстояние от оси OY до точки B. Показатель преломления воздуха равен 1.



Решение задачи приведено на странице 54.

3. Дедушка Теодора был физиком-экспериментатором и долгие годы копил у себя на чердаке различные приборы. В очередной раз копаясь в этих завалах, Теодор нашел электронную пушку. Он решил попрактиковаться в стрельбе по мишеням электронами. Для этого он разместил пушку и мишень M, как показано на рисунке. Далее он включил однородное магнитное поле так, чтобы магнитная индукция была параллельна отрезку соединяющему выходное отверстие пушки и мишень. Определите, какой по величине

должна быть индукция, чтобы электрон попал точно в мишень M. Расстояние до мишени $d = 5$ см, угол $\alpha = 60°$, разгоняющее напряжение в пушке $U = 1000$ В, масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Влиянием гравитационного притяжения пренебречь.



Решение задачи приведено на странице 58.

4. Теодор побывал на экскурсии в лаборатории термодинамических явлений. В рамках одного из демонстрируемых экспериментов требовался плотно закрытый баллон с $V_0 =$ 10 л воздуха при нормальных условиях. Экскурсовод спросил у посетителей, каково будет давление газа внутри баллона, если в него добавить $m = 5{,}5$ г воды и нагреть систему до $t = 100\ °C$.

   Помогите Теодору с ответом на этот вопрос. Учитывайте, что плотность насыщенного пара при 100 $°C$ равна $\rho_0 = 0{,}596$ г/л, а воздух в баллоне изначально абсолютно сухой. Нормальные условия соответствуют $t_0 = 0\ °C, p_0 = 1$ атм.

   Решение

   Можно убедиться, что при заданной массе воды условие образования насыщенного пара не будет выполнено:

$$\rho_0 V_0 = 5.96 \text{ г} > m.$$

   Соответственно, вся вода перейдёт в газообразную фазу. То есть при 100 $°C$ в сосуде содержится воздух и ненасыщенный водяной пар. Давление всего газа есть сумма порционных давлений воздуха p_a и воды p_w:

$$p = p_a + p_w.$$

Воспользуемся законом Гей–Люссака для воздуха:

$$p_a = p_0 \frac{273 + t}{273}.$$

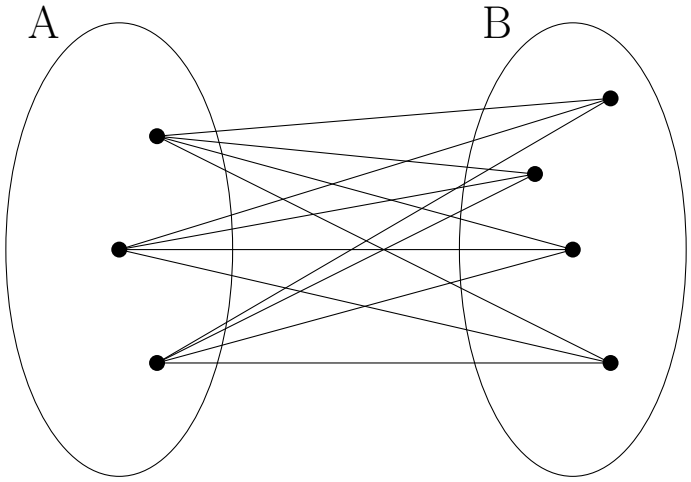
Давление воды найдём из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p_w = \frac{m}{M} R \frac{273 + t}{V_0}.$$

В итоге имеем $p = (1{,}336 + 0{,}947)$ атм $= 2{,}31$ атм.

Ответ: $p = 2{,}31$ атм.

5. Представим в пространстве две группы узлов: A и B. В группе A — a узлов, в группе B — b узлов. Каждый узел группы A подключается к каждому узлу группы B резистором с сопротивлением R.



На рисунке для примера изображён случай, когда $a = 3$, $b = 4$.

Каким будет результирующее сопротивление между двумя узлами из разных групп при любых a и b?

Решение задачи приведено на странице 60.

6. Теодор и Соня очень любят придумывать, а затем проверять физические гипотезы. В этот раз они подвесили один мячик радиуса $r = 1$ см на нерастяжимой нити. Ещё один

такой же мячик они положили на теплоизолированную горизонтальную поверхность. После этого они сообщили каждому мячику равное количество теплоты $Q = 5$ кДж и замерили их конечные температуры. Различны ли в результате их температуры? Если да, то насколько.

Указание. Температурный коэффициент линейного расширения материала мячиков $\beta = 2{,}34 \cdot 10^{-4}$ °C^{-1}, удельная теплоёмкость $C = 1{,}5\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{г °C}}$, плотность $\rho = 1{,}19$ г/см^3. Тепловыми потерями пренебречь.

Комментарий. В ходе решения задач было также сообщено, что мячики однородны.

Решение задачи приведено на странице 62.

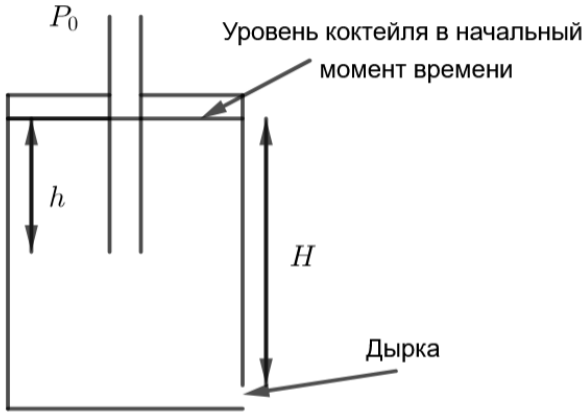
8 Старшая первая лига

1. Теодор побывал на экскурсии в лаборатории термодинамических явлений. В рамках одного из демонстрируемых экспериментов требовался плотно закрытый баллон с $V_0 =$ 10 л воздуха при нормальных условиях. Экскурсовод спросил у посетителей, каково будет давление газа внутри баллона, если в него добавить $m = 5{,}5$ г воды и нагреть систему до $t = 100\ ^\circ C$.

   Помогите Теодору с ответом на этот вопрос. Учитывайте, что плотность насыщенного пара при $100\ ^\circ C$ равна $\rho_0 = 0{,}596$ г/л, а воздух в баллоне изначально абсолютно сухой. Нормальные условия соответствуют $t_0 = 0\ ^\circ C, p_0 = 1$ атм.

   Решение задачи приведено на странице 66.

2. Юля купила себе коктейль в закрытом цилиндрическом стаканчике и вставила в него трубочку так, что теперь его можно считать герметично закрытым. Но оказалось, что стаканчик был бракованным, и в нижней части его боковой стенки была дырка, через которую коктейль стал выливаться.
   За какое время уровень коктейля в стаканчике опустится до нижнего конца трубки?



   Считайте, что расстояние от поверхности коктейля до нижнего конца трубки равно h, а расстояние от поверхности коктейля до дырки в стенке равно $H > h$. Радиус стакана равен R, радиус дырки — r.

   Решение

   Первоначально уровень жидкости в трубочке совпадал с уровнем жидкости в сосуде, как указано на рисунке 33а, и давление у нижнего конца трубки равнялось $P_0 + \rho g h$. После образования дырки вся вода из трубки вытекла (см. рис. 33б), и давление у нижнего конца трубки стало равно атмосферному. Таким образом, истечение жидкости из дырки происходит только под действием давления столба жидкости высотой $H - h$. Применив формулу Торричелли, найдём скорость истечения:

$$v = \sqrt{2g(H-h)}\,.$$

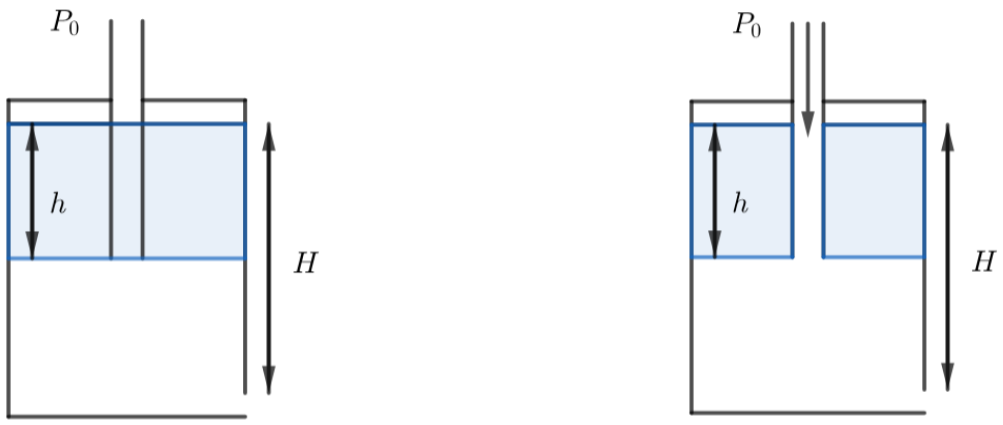


Рис. 33: Положение жидкости: а) первоначально;
б) в момент, когда вся жидкость вытекла из трубочки

Тогда за единицу времени из дырки вытекает объём жидкости, равный $V' = v\pi r^2$. Следовательно, искомое время можно найти по формуле

$$t = \frac{\pi R^2 h}{V'} = \frac{R^2 h}{r^2\sqrt{2g(H-h)}}\,.$$

Ответ: $t = \dfrac{R^2 h}{r^2\sqrt{2g(H-h)}}$.

3. В один стакан налили 350 см^3 подсолнечного масла при температуре $0°C$, в другой стакан налили 90 см^3 подсолнечного масла при температуре $100°C$. Определите объём жидкости после их смешивания.

Указание. Считать, что температурное расширение подсолнечного масла подчиняется закону

$$V_0 = \frac{V}{1+\beta t},$$

где V_0 — объём при температуре 0 $°C$, V — объём при температуре t, а $\beta = 0{,}001\ (°C)^{-1}$.

Решение

Сперва отметим, что масса вещества не меняется при расширении. Пусть ρ — плотность масла при нуле градусов Цельсия. Обозначим массу масла в первом стакане как $m_1 = V_{01}\rho$, а массу масла во втором стакане — $m_2 = V_{02}\rho$. Тогда температура при смешивании

определяется как

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{V_{01} t_1 + V_{02} t_2}{V_{01} + V_{02}}.$$

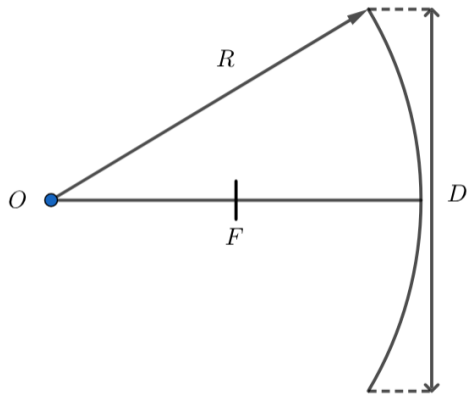
Объёмы соответствующих частей масла при этой температуре равны $V_{01}(1 + \beta t)$ и $V_{02}(1 + \beta t)$. Итого после смешивания имеем объём

$$V = V_{01}(1 + \beta t) + V_{02}(1 + \beta t) = V_{01} + V_{02} + \beta(V_{01} + V_{02})t = V_{01} + V_{02} + \beta V_{01} t_1 + \beta V_{02} t_2 =$$
$$= V_{01}(1 + \beta t_1) + V_{02}(1 + \beta t_2) = V_1 + V_2 = 440 \text{ см}^3.$$

Видно, что объём не поменялся.

Ответ: $V = 440$ см^3.

4. В очередной раз копаясь на чердаке своего дедушки, Теодор обнаружил телескоп. После непродолжительного осмотра Теодор смог понять примерный принцип его работы, однако обнаружил, что одной детали не хватает: недостаёт приёмника излучения, который должен располагаться в фокусе сферического зеркала, установленного в задней части трубы телескопа. Произведя все необходимые замеры, Теодор выяснил, что зеркало имеет диаметр $D = 0{,}5$ м и радиус кривизны $R = 2$ м.



Приёмник должен представлять собой круглый диск, размещаемый перпендикулярно оптической оси зеркала (см. рисунок). Помогите Теодору определить, каким должен быть радиус приёмника, чтобы он мог принять весь поток излучения, отражённый зеркалом.

Указание. Главный фокус сферического зеркала находится на расстоянии $R/2$ от зеркала на оптической оси.

Решение

Как известно, лучи, параллельные главной оптической оси сферического зеркала и находящиеся на малых расстояниях от неё, после отражения соединяются в главном фокусе зеркала F, находящегося на расстоянии $R/2$ от центра O сферической поверхности. Рассмотрим движение луча, отражённого от края сферического зеркала большого диаметра D (см. рис. 34). Угол падения α луча на поверхность равен углу отражения. Поэтому

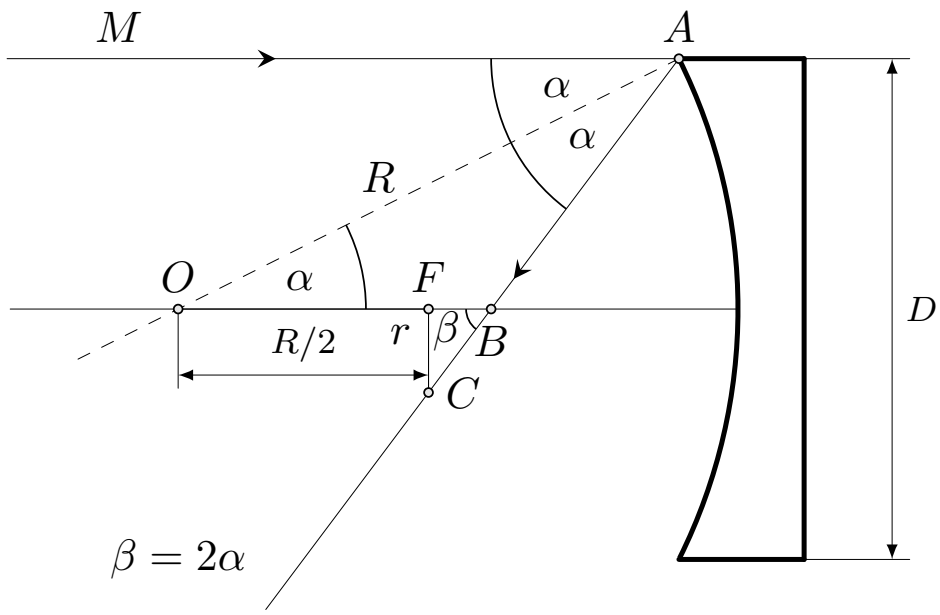


Рис. 34: Ход лучей в сферическом зеркале

угол OAB внутри треугольника, образованный радиусом сферы OA, проведённым к точке падения луча, отражённым лучом AB и отрезком BO на главной оптической оси, равен α. Углы BOA и MAO равны, то есть угол BOA тоже равен α.

Таким образом, треугольник AOB равнобедренный, его сторона AB равна стороне BO. Сумма длин двух других его сторон превышает длину третьей стороны,

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BO} > \mathrm{OA} = R,$$

следовательно, $\mathrm{BO} > R/2$. Это означает, что луч, параллельный главной оптической оси сферического зеркала и проходящий не слишком близко к ней, после отражения пересекает главную оптическую ось в точке B, лежащей между фокусом F и зеркалом. Фокальная поверхность пересекается этим лучом в точке C, находящейся на определённом расстоянии $CF = r$ от главного фокуса.

Таким образом, при отражении параллельного пучка лучей сферическим зеркалом конечного размера они не соединяются в фокусе зеркала, а образуют на фокальной плоскости пучок радиусом r. Из ΔBFC можно записать

$$r = BF \operatorname{tg} \beta = BF \operatorname{tg} 2\alpha,$$

где α — максимальный угол отражения, соответственно, $\sin\alpha = D/2R = 1/8 \ll 1$, а кроме того

$$BF = BO - OF = \frac{R}{2\cos\alpha} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Тогда

$$r = \frac{R}{2}\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = R\sin\alpha\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-2\sin^2\alpha} \approx 2 \text{ мм}.$$

Ответ: $r = 2$ мм.

5. Лиза решила испечь торт. Ей надо отмерить 300 грамм муки, но в её кухонных весах села батарейка. Находчивая Лиза замечает, что у неё есть пачка масла, на которой указана масса 200 грамм, подходящая пружина и секундомер. Она насыпает горку муки в очень лёгкую миску, цепляет её к пружине и измеряет период колебаний $T_1 = 2{,}8$ с, а также период колебаний для пачки масла $T_2 = 2{,}3$ с. Сколько муки нужно добавить или убрать Лизе из миски?

Решение

Пусть m_1 — масса взятой Лизой горки муки. Лиза сделала пружинный маятник, его период колебаний —

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

Пусть $m_2 = 0{,}2$ кг — масса пачки масла, тогда период её колебаний —

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}.$$

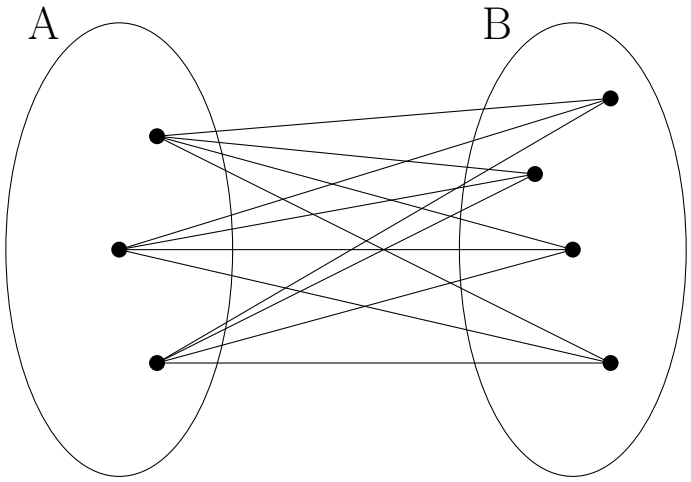
Следовательно,

$$m_1 = m_2\frac{T_1^2}{T_2^2} \approx 0{,}296 \text{ кг}.$$

Таким образом, Лизе надо добавить 4 грамма муки. Но, вероятно, учитывая погрешность Лизиных измерений, для приготовления торта ей хватит изначально насыпанной горки муки.

Ответ: надо добавить 4 грамма муки.

6. Представим в пространстве две группы узлов, A и B. В группе A — a узлов, в группе B — b узлов. Каждый узел группы A подключается к каждому узлу группы B резистором с сопротивлением R.



На рисунке для примера изображён случай, когда $a = 3$, $b = 4$.

Каким будет результирующее сопротивление между двумя узлами из одной группы при любых a и b?

Решение

Обозначим узлы из группы A $A_1, A_2, \ldots, A_a$, а узлы из группы B — $B_1, B_2, \ldots, B_b$.

Если две точки цепи имеют одинаковый потенциал, ток между ними не течёт, даже если они соединены проводом или резистором. Если в цепи есть две точки, в которые и из которых текут одинаковые токи, эти точки симметричны и ничего не изменится, если их поменять местами, то они имеют одинаковый потенциал.

Вычислим сопротивление между точками A_1 и A_2. Если мы внимательно посмотрим на схему, то обнаружим, что все точки из B имеют одинаковый потенциал: если, например, мы поменяем местами точки B_{42} и B_{47}, ситуация в цепи не изменится. То же самое относится и к точкам $A_3, A_4, \ldots, A_a$ — они тоже все имеют одинаковый потенциал. Мы можем соединить все точки с одинаковым потенциалом в один узел. Давайте посмотрим, во что превратится схема.

Представим, что эллипс B' представляет собой объединённые узлы $B_1, B_2, \ldots, B_b$, а эллипс A' — узлы $A_3.A_4, \ldots, A_a$. От узла A_1 к B' идёт b параллельно подключённых резисторов, то есть сопротивление между ними равно R/b. Аналогично сопротивление между узлами A_2 и B' также равно R/b. Эти участки подключены друг к другу последовательно, таким образом, сопротивление между точками A_1 и A_2 будет равно $2R/b$. Очевидно, что в силу того, что узлы A_1 и A_2 мы выбрали произвольно, сопротивление

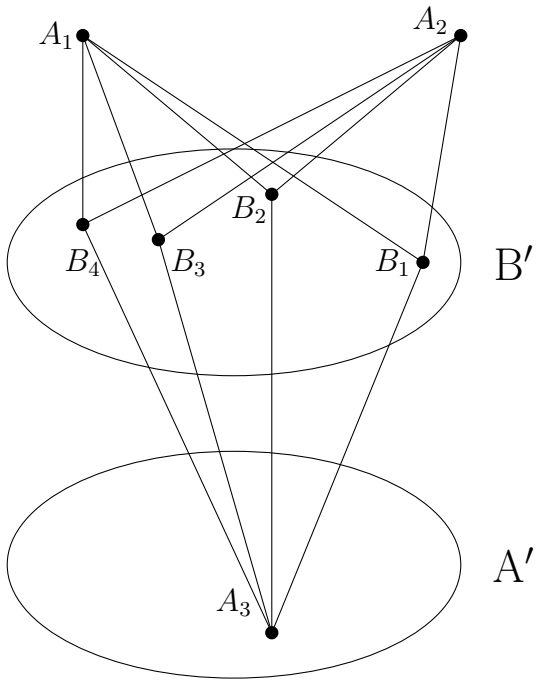


Рис. 35: Схема с отделёнными узлами A_1 и A_2 для $a = 3, b = 4$

между любыми двумя узлами группы A равно

$$R_{AA} = \frac{2R}{b}.$$

В силу симметрии задачи, если возьмём два узла из группы B, мы получим, что сопротивление между ними будет равно

$$R_{BB} = \frac{2R}{a}.$$

Ответ: $R_{AA} = \dfrac{2R}{b}, \;\; R_{BB} = \dfrac{2R}{a}.$

9 Старшая вторая лига

1. Имеются 4 одинаковых кубика: два из них имеют температуру $80°C$ (назовём их красными), а другие два имеют температуру $40°C$ (назовём их синими). Можно ли сделать синие кубики горячее красных, и если можно, то как? Разрешается только приводить кубики в тепловое равновесие путём непосредственного контакта, тепло кубикам не сообщается извне и над ними не совершается никакая работа. Теплообменом со средой пренебречь.

   Решение

   Пронумеруем кубики: пусть у нас есть первый красный кубик (K_1), второй красный кубик (K_2), первый синий кубик (C_1) и второй синий кубик (C_2).

   - Приведём в равновесие кубики K_1 и C_1. Их температура выровняется до $60°C$.
   - Приведём в равновесие кубики C_1 и K_2. Их температура выровняется до $70°C$.
   - Приведём в равновесие кубики C_2 и K_1. Их температура выровняется до $50°C$.
   - Приведём в равновесие кубики C_2 и K_2. Их температура выровняется до $60°C$.
   - Приведём в равновесие кубики K_1 и K_2. Их температура выровняется до $55°C$.

     Таким образом, температуры синих кубиков равны $70°C$ (у кубика C_1) и $60°C$ (у кубика C_2), а красных — $55°C$.

   Ответ: да, можно.

2. В один стакан налили 350 см^3 подсолнечного масла при температуре $0°C$, в другой стакан налили 90 см^3 подсолнечного масла при температуре $100°C$. Определите объём жидкости после их смешивания.

   Указание. Считать, что температурное расширение подсолнечного масла подчиняется закону
   $$V_0 = \frac{V}{1+\beta t},$$
   где V_0 — объём при температуре 0 $°C$, V — объём при температуре t, а $\beta = 0{,}001\ (°C)^{-1}$.

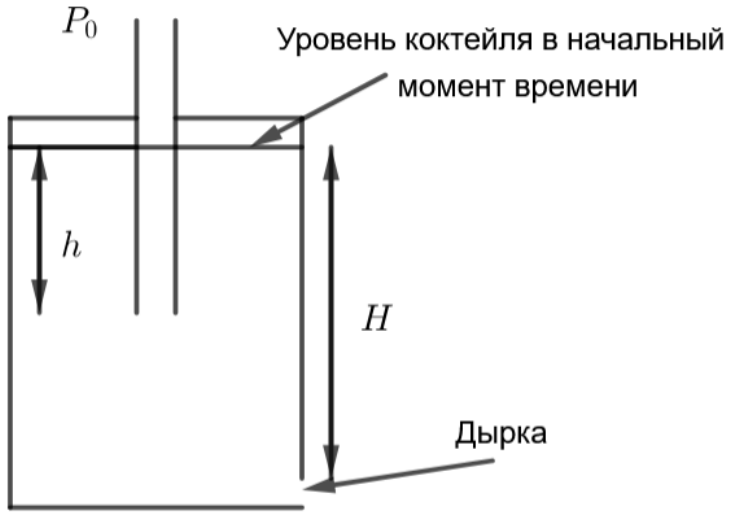
   Решение задачи приведено на странице 70.

3. Лиза решила испечь торт. Ей надо отмерить 300 грамм муки, но в её кухонных весах села батарейка. Находчивая Лиза замечает, что у неё есть пачка масла, на которой указана масса 200 грамм, подходящая пружина и секундомер. Она насыпает горку муки в очень лёгкую миску, цепляет её к пружине и измеряет период колебаний $T_1 = 2{,}8$ с, а также период колебаний для пачки масла $T_2 = 2{,}3$ с. Сколько муки нужно добавить или убрать Лизе из миски?

   Решение задачи приведено на странице 73.

4. Юля купила себе коктейль в закрытом цилиндрическом стаканчике и вставила в него трубочку так, что теперь его можно считать герметично закрытым. Но оказалось, что стаканчик был бракованным, и в нижней части его боковой стенки была дырка, через которую коктейль стал выливаться.

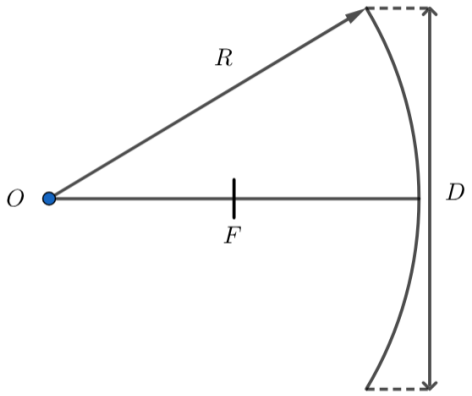
   За какое время уровень коктейля в стаканчике опустится до нижнего конца трубки?



   Считайте, что расстояние от поверхности коктейля до нижнего конца трубки равно h, а расстояние от поверхности коктейля до дырки в стенке равно $H > h$. Радиус стакана равен R, радиус дырки — r.

   Решение задачи приведено на странице 69.

5. В очередной раз копаясь на чердаке своего дедушки, Теодор обнаружил телескоп. После непродолжительного осмотра Теодор смог понять примерный принцип его работы, однако обнаружил, что одной детали не хватает: недостаёт приёмника излучения, который должен располагаться в фокусе сферического зеркала, установленного в задней части трубы телескопа. Произведя все необходимые замеры, Теодор выяснил, что зеркало имеет диаметр $D = 0{,}5$ м и радиус кривизны $R = 2$ м.



Приёмник должен представлять собой круглый диск, размещаемый перпендикулярно оптической оси зеркала (см. рисунок). Помогите Теодору определить, каким должен быть радиус приёмника, чтобы он мог принять весь поток излучения, отражённый зеркалом.

Указание. Главный фокус сферического зеркала находится на расстоянии $R/2$ от зеркала на оптической оси.

Решение задачи приведено на странице 71.

6. Теодор побывал на экскурсии в лаборатории термодинамических явлений. В рамках одного из демонстрируемых экспериментов требовался плотно закрытый баллон с $V_0 = 10$ л воздуха при нормальных условиях. Экскурсовод спросил у посетителей, каково будет давление газа внутри баллона, если в него добавить $m = 5{,}5$ г воды и нагреть систему до $t = 100\ ^\circ C$.

Помогите Теодору с ответом на этот вопрос. Учитывайте, что плотность насыщенного пара при $100\ ^\circ C$ равна $\rho_0 = 0{,}596$ г/л, а воздух в баллоне изначально абсолютно сухой. Нормальные условия соответствуют $t_0 = 0\ ^\circ C$, $p_0 = 1$ атм.

Решение задачи приведено на странице 66.

14 декабря 2024 года

10 Младшая высшая лига

1. Как-то раз Соня и Теодор отправились на рыбалку с отцом. Соня, не испытывая большого интереса к процессу, решила, что будет читать книгу, но её планам помешал ветер, переворачивавший за неё страницы. Тогда за отсутствием других альтернатив она решила измерить скорость и направление своего недоброжелателя, приняв во внимание следующие факты: конечной точкой их маршрута служил остров, расположенный в $l = 4$ км строго на юг от начального положения моторной лодки, но по пути к острову нужно было проверить две ловушки. Таким образом, маршрут состоял из трёх отрезков.

   Путь до первой ловушки занял $t_1 = 3$ мин, ветер на данном участке дул с востока, а скорость его составляла $v_1 = 15$ м/с. Путь от первой ловушки до второй занял $t_2 = 1{,}5$ мин, ветер дул строго с юго-востока со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Последний участок пути до острова занял $t_3 = 1{,}5$ мин, скорость ветра на данном участке была равна $v_3 = 5$ м/с, а воспринимаемое направление — строго с юго-запада. Какова была фактическая скорость ветра?

   Примечание. Скорость лодки могла отличаться на различных участках пути, но на протяжении каждого из них она оставалась постоянной. Считать время, необходимое для поворота и ускорения, пренебрежимо малым. Фактическая скорость и направление ветра не менялись на протяжении всего пути.

   Решение

   Рассмотрим движение моторной лодки относительно воздуха: сначала она переместилась на $l_1 = t_1 v_1 = 2700$ м на восток, затем на $l_2 = t_2 v_2 = 900$ м на юго-восток и, наконец, на $l_3 = t_3 v_3 = 450$ м на юго-запад. Суммарное смещение на юг составило

$$L_S = \frac{l_2 + l_3}{\sqrt{2}} \approx 955 \text{ м},$$

а на восток

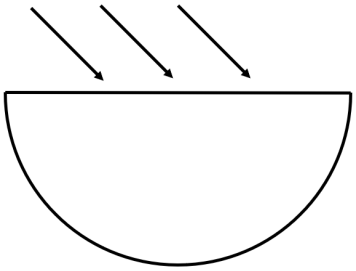
$$L_E = l_1 + \frac{l_2 - l_3}{\sqrt{2}} \approx 3018 \text{ м},$$

относительно земли же смещение составило l на юг. Следовательно, воздух должен был сместиться на L_E на запад и на $l - L_S$ на юг. Отсюда получаем, что скорость ветра равна

$$v_t = \frac{\sqrt{L_E^2 + (l - L_S)^2}}{t_1 + t_2 + t_3} \approx 11.9 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_t \approx 11.9$ м/с.

2. Теодор нашёл в гараже у своего дедушки, бывшего физика-экспериментатора, половинку стеклянного цилиндра. Ему стало интересно, как такая структура будет пропускать свет. Он установил источник света так, чтобы все лучи падали на плоскую часть полуцилиндра (см. рис) под углом 45°. Считая, что показатель преломления стекла $n = \sqrt{2}$, определите, из какой части цилиндра будут выходить лучи света.



Решение

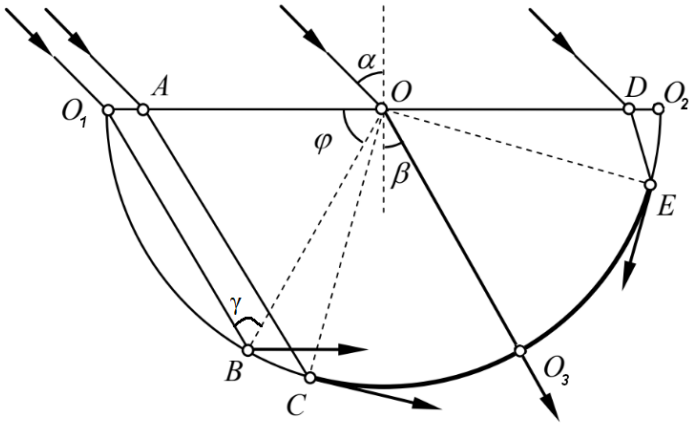


Рис. 36: Ход лучей в полуцилиндре

Сперва отметим, что угол преломления одинаков для всех точек плоскости, на которую падают лучи, и равен, согласно закону Снеллиуса, $\sin(\beta) = \sin 45°/n$, а конкретно $\beta = 30°$. Прошедшие внутрь стекла лучи достигнут границы в точке, которую можно

характеризовать углом ϕ (см.рис. 36). Нетрудно заметить, что минимальное значение этого угла 60°, оно соответствует точке B на рисунке 36 (образуется равносторонний треугольник). Требуется выяснить, как выходят из полуцилиндра лучи для всех возможных значений угла $\phi \in [60{,}180]$. Для этого проанализируем закон преломления для выходящих лучей.

Угол падения внутри стекла вычисляется как

$$\gamma = 180^\circ - \phi - (90^\circ - \beta) = 120^\circ - \phi.$$

Тогда

$$n \sin\gamma = \sin\theta,$$

где θ — угол преломления при выходе из призмы. Ясно, что когда $\theta > 90^\circ$, то происходит полное внутреннее отражение. Соответственно критическое значение угла определяется как (на рис. 36 точка C)

$$\sin\gamma = 1/n = \sqrt{2}/2 \implies \gamma = 45^\circ \implies \phi = 75^\circ.$$

Отметим, что из геометрии задачи ясно, что при увеличении угла ϕ достигнем критического угла ещё раз в точке E. Аналогично анализируя эту точку, приходим к выводу, что $\phi = 165^\circ$.

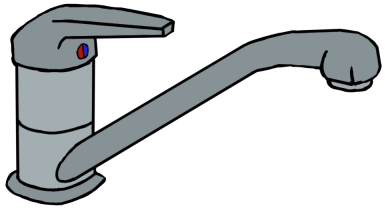
Рассмотрим теперь лучи, которые выйдут из верхней части полуцилиндра. Это лучи, которые испытают полное отражение. Луч O_1B после отражения попадет в точку O_3, а затем отразится в O_2. Также в силу симметрии относительно оси OO_3 все лучи, попавшие в дугу BC, отразятся в точку O_3, а затем в точки дуги EO_2, и выйдут из плоской части цилиндра на отрезке DO_2. Лучи, попавшие в дугу EO_2, отразятся в точку O_3, а затем в точки дуги BC, и выйдут из плоской части цилиндра на отрезке O_1A. Длина отрезков

$$O_1A = DO_2 = \left(1 - \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}\right) R \approx 0{,}18R.$$

Ответ: лучи покинут цилиндрическую поверхность с дуги, имеющей центральный угол 90° и начинающейся с точки $\phi = 75^\circ$, и плоскую часть цилиндра от краёв до $\approx 0{,}18R$.

3. Организаторы физбоёв очень торопились приготовить экспериментальные задачи к турниру и замарали руки. Подойдя к раковине помыть руки, они посмотрели на смеситель,

находящийся в СФТИ, и отметили, что это классический смеситель, который определяет соотношение подачи холодной и горячей воды в зависимости от того, насколько сильно повёрнут рычаг в определённом направлении.



Рычаг можно повернуть максимум на 90° влево (тогда подаётся только горячая вода) и на 90° вправо (тогда подаётся только холодная вода). На сколько градусов надо повернуть рычаг, чтобы вода имела приятную температуру $30°C$? Температура горячей воды $60°C$, температура холодной воды $20°C$. Доля горячей воды в смеси, вытекающей из крана, линейно зависит от угла его поворота.

Решение

Пусть угол поворота крана α отмеряется от его крайнего правого положения. То есть $\alpha = 0$, когда кран повёрнут максимально вправо (течёт холодная вода). Тогда доля горячей воды в смеси составляет

$$k = A\alpha,$$

где A — некоторая постоянная. Доля холодной воды в смеси:

$$l = A\left(180° - \alpha\right).$$

Очевидно, что

$$k + l = 1.$$

Запишем уравнение теплового баланса для смеси холодной и горячей воды:

$$Q_h = Q_c;$$
$$m_h c(t_h - t_0) = m_c c(t_0 - t_c).$$

Здесь Q_h — количество теплоты, которое отдаёт горячая вода; Q_c — количество теплоты, которое получает холодная вода; t_h — изначальная температура горячей воды; t_c —

изначальная температура холодной воды; t_0 — температура получившейся смеси; m_h и m_c — масса горячей и холодной воды соответственно. Тогда

$$\frac{m_h}{m_c} = \frac{t_0 - t_c}{t_h - t_0}.$$

С другой стороны,

$$\frac{m_h}{m_c} = \frac{k}{l}.$$

Значит,

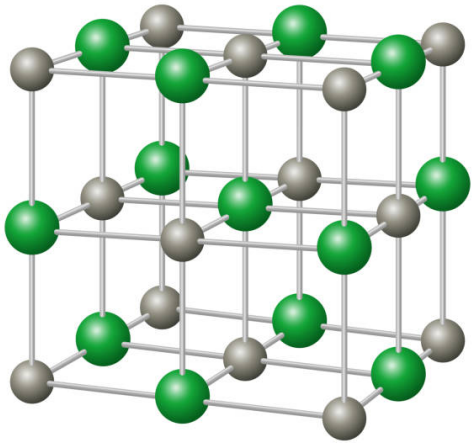
$$\frac{\alpha}{180^\circ - \alpha} = \frac{t_0 - t_c}{t_h - t_0}.$$

Откуда

$$180^\circ - \alpha = 3\alpha; \alpha \approx 45^\circ.$$

Ответ: на 45° относительно крайнего правого направления.

4. Однажды Соня наткнулась на необычный рисунок. Она быстро смекнула, что на нём изображена элементарная ячейка некоего кристалла, а сам кристалл представляет собой повторяющуюся структуру, состоящую из таких ячеек. При этом к рисунку шло указание, что сферы большего размера отвечают атомам с массовым числом 23, а сферы меньшего размера соответствуют атомам с массовым числом 35,5.



Кроме того, было написано, что изображённая ячейка является кубом с длиной ребра $a = 5{,}6 \cdot 10^{-10}$ м, а материал в целом имеет плотность $\rho = 2{,}22 \cdot 10^3$ кг/м^3. Соня догадалась, что на основе этих данных можно оценить массу одного атома водорода. Такая же задача стоит перед вами.

Решение

Обозначим вещество с атомной массой 23 как Na, а с массой 35,5 — как Cl. Подсчитаем, какое количество n_1 атомов Na и n_2 атомов Cl входит в состав одной элементарной ячейки кристалла (см. рисунок в условии задачи). В центре ячейки находится один

атом Na, полностью принадлежащий этой ячейке, и 12 атомов Na, находящихся на рёбрах большого куба. Каждый из атомов на ребре куба принадлежит ещё трём другим элементарным ячейкам, данной ячейке принадлежит 1/4 такого атома Na. Всего одной ячейке принадлежит

$$n_1 = 1 + 12 \cdot 1/4 = 4 \text{ атома Na.}$$

В одной элементарной ячейке кристалла NaCl имеется 6 атомов Cl, находящихся на гранях куба, и 8 атомов Cl, находящихся в его вершинах. Каждый атом на грани принадлежит ещё одной ячейке, а атомы в вершинах куба принадлежат ещё семи ячейкам. Поэтому одной ячейке принадлежит

$$n_2 = 6 \cdot 1/2 + 8 \cdot 1/8 = 4 \text{ атома Cl.}$$

Таким образом, одной элементарной ячейке кристалла NaCl принадлежат 4 атома Na и 4 атома Cl. Масса m такой ячейки равна

$$m = 4m_{rNa} + 4m_{rCl} \text{ (а.е.м.)},$$

где m_{rNa} и m_{rCl} — относительные атомные массы Na и Cl. Так как масса атома водорода m_H приблизительно равна одной атомной единице массы: $m_H = 1{,}008$ а.е.м. $\approx$ 1 а.е.м., то масса элементарной ячейки NaCl равна

$$m = 4(m_{rNa} + m_{rCl})m_H.$$

С другой стороны, она равна $m = \rho a^3$, следовательно,

$$m_H = \frac{\rho a^3}{4(m_{rNa} + m_{rCl})} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Ответ: $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

5. Лиза едет в лифте, который поднимается с постоянной скоростью. Теряя терпение, она подбрасывает ключи в воздух. Каждый раз они взлетают на высоту 62 см. Однако между броском и последующей ловлей ключей лифт начинает плавно тормозить так, что ключи взлетают на высоту 72 см и остаются в воздухе дольше, чем обычно, на 0,15 секунды.

   Определите ускорение, с которым замедляется лифт. Ускорение свободного падения считать равным 9,8 м/c^2.

Решение

Пусть t — время, которое ключи проводят в воздухе при равномерном движении лифта, $h = 0{,}62$ м — высота, на которую они в таком случае подлетают.

$$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}711 \text{ с.}$$

При торможении лифта время, которое ключи проводят в воздухе, увеличилось на $\Delta t = 0{,}15$ секунды и стало равным

$$T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} + \Delta t \approx 0{,}861 \text{ с.}$$

Разделим этот промежуток времени на две части: t_1 — время полёта ключей, пока лифт движется равномерно, и t_2 — время полёта ключей, когда у лифта уже появилось ускорение:

$$T = t_1 + t_2.$$

Начальная скорость ключей

$$v_0 = \sqrt{2gh} \approx 3{,}486 \ \frac{\text{м}}{c^2}.$$

Обозначим скорость ключей в момент появления у лифта ускорения через v_1. Тогда

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1},$$

где h_1 — высота ключей в тот же момент времени

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g}.$$

Время t_2 в свою очередь состоит из двух частей: время, когда ключи летят вверх, и время, которое ключи падают вниз:

$$t_2 = \frac{v_1}{a} + \sqrt{\frac{2H}{a}},$$

здесь $H = 0{,}72$ м, a — ускорение, с которым летят ключи. Значит, общее время полёта

$$T = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} + v_1\frac{g-a}{ag} + \sqrt{\frac{2H}{a}}. \tag{8}$$

В этом выражении две неизвестные — a и v_1. Выразим v_1 через другие величины. Рассматривая равноускоренное движение ключей на участке $h_1 - H$, получим, что

$$v_1^2 = 2a(H - h_1).$$

По закону сохранения энергии

$$v_0^2 = 2gh_1 + v_1^2;$$
$$v_0^2 = 2gh_1 + 2a(H - h_1) = 2(g - a)h_1 + 2aH \quad \Longrightarrow \quad h_1 = \frac{v_0^2 - 2aH}{2(g - a)}.$$

Следовательно,

$$v_1 = \sqrt{a\frac{2gH - v_0^2}{g - a}}.$$

Подставим полученное для v_1 выражение в формулу для общего времени (8) и получим

$$\sqrt{\frac{g - a}{a}2g(H - h)} + g\sqrt{\frac{2H}{a}} = gT - v_0.$$

Будем решать это уравнение относительно a, подставив численные значения:

$$\sqrt{1{,}96\frac{9{,}8 - a}{a}} + 9{,}8\frac{1{,}2}{\sqrt{a}} = 8{,}438 - 3{,}486;$$
$$1{,}4\sqrt{\frac{9{,}8 - a}{a}} + \frac{11{,}76}{\sqrt{a}} = 4{,}952;$$

$$1{,}4\sqrt{9{,}8 - a} = 4{,}952\sqrt{a} - 11{,}76;$$
$$1.96(9{,}8 - a) = 24{,}522a - 116{,}471\sqrt{a} + 138{,}30, \quad 4{,}952\sqrt{a} - 11{,}76 \geq 0;$$

$$26{,}482a - 116{,}471\sqrt{a} + 119{,}092 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\sqrt{a}$. Решим его:

$$\sqrt{a} = \frac{116{,}471 \pm \sqrt{950{,}316}}{2 \cdot 26{,}482}.$$

Таким образом, $a = 7{,}7$ м/c^2, либо $a = 2{,}6$ м/c^2. Но следует учесть, что должно выполняться условие

$$4{,}952\sqrt{a} - 11{,}76 \geq 0,$$

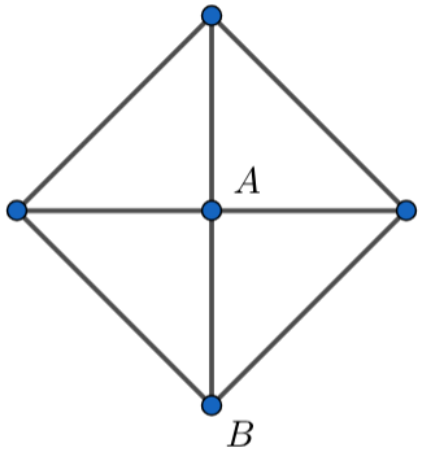
тогда ускорение ключей $a = 7{,}7$ м/c^2.

Так как лифт движется вверх и тормозит, его ускорение можно выразить через ускорение ключей:

$$a_л = g - a \approx 2{,}1\ \frac{м}{c^2}.$$

Ответ: 2,1 м/c^2.

6. Посчитайте сопротивление цепи между точками A и B на рисунке, если сопротивление каждого отрезка в ней равно R.



Решение

Обозначим верхнюю точку цепи за 2, а боковые — за 1. Боковые точки цепи эквивалентны и цепь можно заменить эквивалентной:

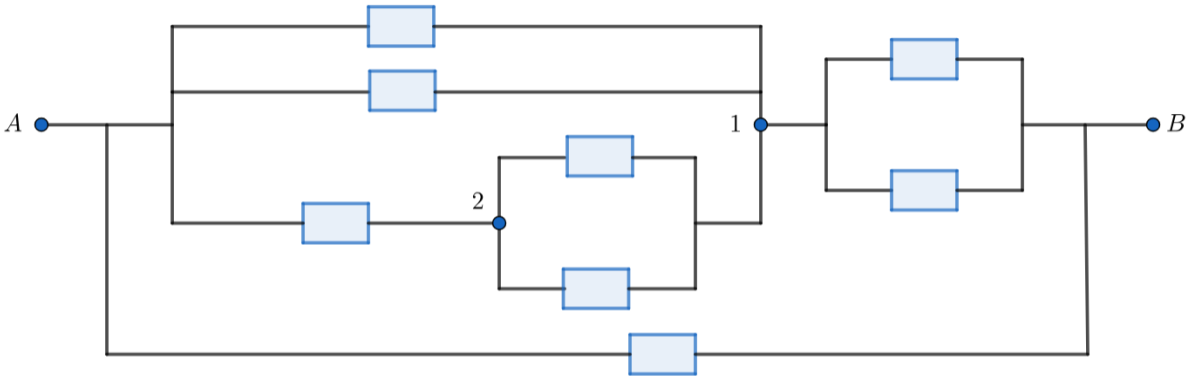


Рис. 37: Эквивалентная цепь

Здесь сопротивление каждого резистора равно R. Посчитать сопротивление последней цепи несложно, оно равно $R^* = \dfrac{7}{15}R$.

Ответ: $R^* = \dfrac{7}{15}R$.

11 Младшая первая лига

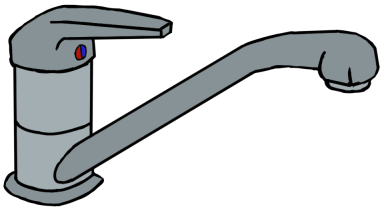
1. Как-то раз Соня и Теодор отправились на рыбалку с отцом. Соня, не испытывая большого интереса к процессу, решила, что будет читать книгу, но её планам помешал ветер, переворачивавший за неё страницы. Тогда за отсутствием других альтернатив она решила измерить скорость и направление своего недоброжелателя, приняв во внимание следующие факты: конечной точкой их маршрута служил остров, расположенный в $l = 4$ км строго на юг от начального положения моторной лодки, но по пути к острову нужно было проверить две ловушки. Таким образом, маршрут состоял из трёх отрезков.

   Путь до первой ловушки занял $t_1 = 3$ мин, ветер на данном участке дул с востока, а скорость его составляла $v_1 = 15$ м/с. Путь от первой ловушки до второй занял $t_2 =$ 1,5 мин, ветер дул строго с юго-востока со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Последний участок пути до острова занял $t_3 = 1{,}5$ мин, скорость ветра на данном участке была равна $v_3 = 5$ м/с, а воспринимаемое направление — строго с юго-запада. Какова была фактическая скорость ветра?

   Примечание. Скорость лодки могла отличаться на различных участках пути, но на протяжении каждого из них она оставалась постоянной. Считать время, необходимое для поворота и ускорения, пренебрежимо малым. Фактическая скорость и направление ветра не менялись на протяжении всего пути.

   Решение задачи приведено на странице 79.

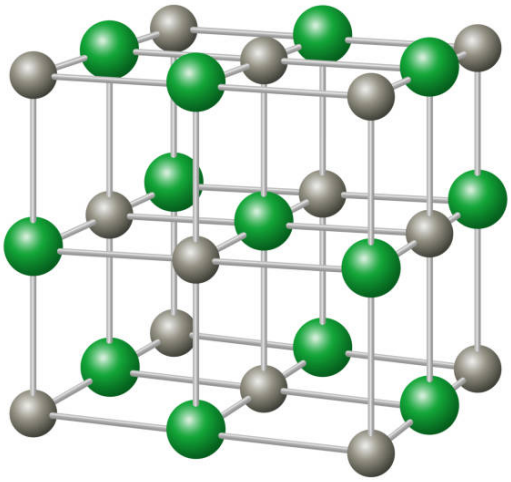
2. Организаторы физбоёв очень торопились приготовить экспериментальные задачи к турниру и замарали руки. Подойдя к раковине помыть руки, они посмотрели на смеситель, находящийся в СФТИ, и отметили, что это классический смеситель, который определяет соотношение подачи холодной и горячей воды в зависимости от того, насколько сильно повёрнут рычаг в определённом направлении.



Рычаг можно повернуть максимум на 90° влево (тогда подаётся только горячая вода) и на 90° вправо (тогда подаётся только холодная вода). На сколько градусов надо повернуть рычаг, чтобы вода имела приятную температуру $30°C$? Температура горячей воды $60°C$, температура холодной воды $20°C$. Доля горячей воды в смеси, вытекающей из крана, линейно зависит от угла его поворота.

Решение задачи приведено на странице 82.

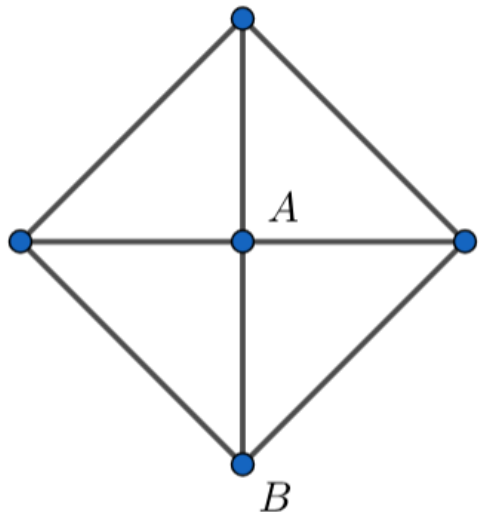
3. Однажды Соня наткнулась на необычный рисунок. Она быстро смекнула, что на нём изображена элементарная ячейка некоего кристалла, а сам кристалл представляет собой повторяющуюся структуру, состоящую из таких ячеек. При этом к рисунку шло указание, что сферы большего размера отвечают атомам с массовым числом 23, а сферы меньшего размера соответствуют атомам с массовым числом 35,5.



Кроме того, было написано, что изображённая ячейка является кубом с длиной ребра $a = 5{,}6 \cdot 10^{-10}$ м, а материал в целом имеет плотность $\rho = 2{,}22 \cdot 10^3$ кг/м^3. Соня догадалась, что на основе этих данных можно оценить массу одного атома водорода. Такая же задача стоит перед вами.

Решение задачи приведено на странице 83.

4. Посчитайте сопротивление цепи между точками A и B на рисунке, если сопротивление каждого отрезка в ней равно R.



Решение задачи приведено на странице 87.

5. Лиза бежит в школу из дома со скоростью 5 км/ч. С какой скоростью она должна бежать из школы, чтобы по возвращении домой её средняя путевая скорость составила 15 км/ч? Лиза возвращается домой из школы тем же маршрутом, по которому бежит в школу, но в обратном направлении.

Решение

Пусть s — расстояние от дома до школы, $v_1 = 5$ км/ч — скорость Лизы на пути в школу, v_2 — скорость Лизы на пути из школы, а $v_{\text{ср}} = 15$ км/ч — требуемая средняя скорость. Тогда время, затраченное Лизой на путь туда-обратно, с одной стороны, составляет $\dfrac{2s}{v_{\text{ср}}}$ из определения средней скорости, а с другой стороны, оно равно сумме времени, затраченного на путь в школу, и времени, затраченного на путь из школы:

$$\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}.$$

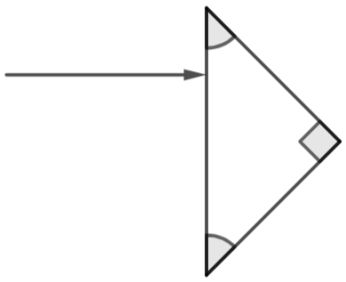
Таким образом,

$$\frac{2s}{v_{\text{ср}}} = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2};$$
$$\frac{2}{v_{\text{ср}}} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2};$$
$$\frac{1}{v_2} = \frac{2}{v_{\text{ср}}} - \frac{1}{v_1} = \frac{2v_1 - v_{\text{ср}}}{v_{\text{ср}}v_1};$$
$$v_2 = \frac{v_{\text{ср}}v_1}{2v_1 - v_{\text{ср}}} = \frac{15 \cdot 5}{10 - 15} = -15 \text{ км/ч}.$$

Скорость вышла отрицательной. Время, затраченное на путь домой, отрицательным быть не может. Значит, ситуация, описанная в задаче, не может быть реализована.

Ответ: такой скорости не существует.

6. Постройте ход луча в равнобокой прямоугольной призме, указанной на рисунке, если показатель преломления стекла, из которого она сделана, равен $n = 1{,}7$.



Решение

Через первую грань луч пройдёт, не меняя своего направления. Угол падения на вторую грань равен $\alpha = 45°$, при этом выполняется условие полного внутреннего отражения:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 > \frac{1}{n} \approx 0{,}59.$$

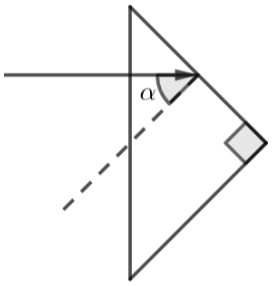


Рис. 38: Отражение луча от второй грани призмы

Аналогично будет и при втором отражении. Таким образом ход луча следующий:

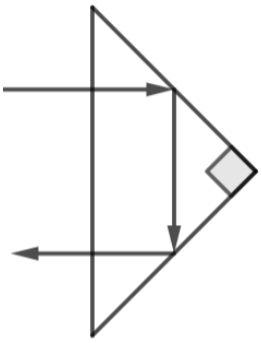


Рис. 39: Ход луча в призме

Ответ: см. рисунок 39.

15 декабря 2024 года

12 Младшая высшая лига. Финал

1. Однажды кот Лизы и Теодора каким-то образом пробрался в запертый подвал их двухэтажного дома. Чтобы проникнуть туда самим и забрать мяукающего кота, им пришлось позвать на помощь отца. Осматриваясь в подвале, Теодор заметил отопительный котёл с двумя температурными датчиками. По словам отца, первый датчик показывает температуру, до которой котёл нагревает воду: $t_1 = 68°C$. Затем эта вода поступает на второй этаж, проходит через радиатор, после чего спускается на первый этаж, проходит через другой радиатор и затем возвращается в котёл, имея температуру $t_2 = 60°C$, согласно показаниям второго датчика.

   Теодор решил рассмотреть упрощённую модель системы отопления их дома. Он считает два этажа одинаковыми, пренебрегает наличием лестницы между этажами. Теплопотерями через крышу и пол он также пренебрегает, то есть учитывает потери тепла только через стены дома. Кроме того, Теодор предполагает, что вода остывает только в радиаторах.

   При этом температуру воздуха на обоих этажах считает одинаковой и равной t. А вот чем пренебрегать Теодор не стал, так это подсчётом рёбер радиаторов на обоих этажах. На радиаторе второго этажа их оказалось 10, а на радиаторе первого — 11. Помогите Теодору посчитать согласно данной модели температуру воздуха на обоих этажах t.

   Примечание: Мощность тепловых потерь через стену пропорциональна её площади и разнице температур внутри и снаружи. Предполагайте, что при движении через радиатор температура воды линейно уменьшается с пройденным расстоянием.

   Решение

   Поскольку этажи идентичны и их внутренние температуры одинаковы, то и мощности

тепловых потерь через стены обоих этажей также должны быть равны:

$$N_{1э} = N_{2э}.$$

Следовательно, горячая вода, поступающая из котла, отдает половину своего тепла на верхнем этаже, а половину — на нижнем, тогда температура воды в трубе между двумя этажами равна $t_{тр} = (t_1+t_2)/2$. Поскольку температура на этажах постоянна во времени, то мощности тепловых потерь через стены равны тепловым мощностям радиаторов. На верхнем этаже тепловая мощность радиатора равна

$$N_{2э} = k\Big(\frac{1}{2}(t_1 + t_{тр}) - t\Big),$$

где k — некоторый коэффициент, а $\frac{1}{2}(t_1 + t_{тр})$ — средняя температура радиатора. Аналогично тепловая мощность радиатора на нижнем этаже составляет

$$N_{1э} = 1{,}1k\Big(\frac{1}{2}(t_{тр} + t_2) - t\Big),$$

где коэффициент 1,1 добавлен из-за того, что площадь радиатора в 1,1 раза больше. Получим

$$k\Big(\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{tube}}) - t\Big) = 1{,}1k\Big(\frac{1}{2}(t_{тр} + t_2) - t\Big),$$

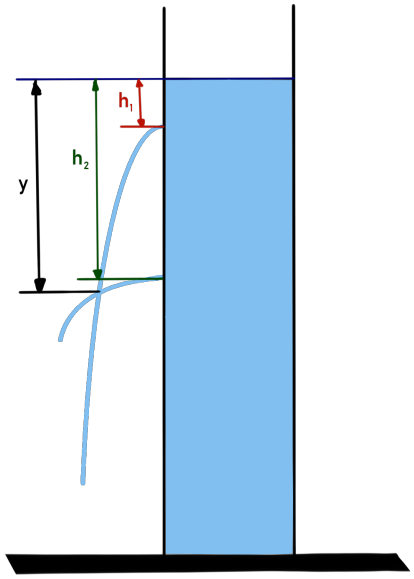
$$t = 5\Big(\frac{11}{10}t_2 - t_1 + \frac{1}{10}t_{тр}\Big) = \frac{1}{4}(23t_2 - 19t_1) = 22\,^\circ\text{C}.$$

Ответ: $t = 22^\circ C$.

2. Теодора попросили накачать воду в водонапорную башню, но так, чтобы она не превышала определённый уровень. Теодор же увидел, что башня вмещает намного больше воды и решил накачать её до максимума. Когда он довольный пошёл домой, то увидел, что из отверстий в верхней части башни вытекают две струи воды: одна на «глубине» $h_1 = 0{,}5$ м от уровня воды, а другая — на «глубине» $h_2 = 0{,}9$ м от уровня воды, — и оба отверстия расположены на одной вертикальной линии. Струи воды, вытекающие из этих отверстий, пересекаются. Определите «глубину» относительно уровня воды, на которой это произойдёт.

   Учтите, что водонапорная башня имеет форму высокого цилиндра. Предполагаем, что скорость каждого элемента объёма воды, выходящего из отверстия, одинакова и горизонтальна. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

Примечание: При наличии в сосуде отверстия выходящая струя непосредственно у края отверстия неравномерна; струя сужается и становится однородной только на расстоянии от отверстия, равном нескольким его диаметрам. Следует полагать, что в рассматриваемой задаче это расстояние незначительно.



Решение

Скорость воды, вытекающей из отверстия на глубине h ниже уровня воды, удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h,$$

что по сути является законом сохранения энергии. Для двух струй мы имеем

$$\frac{1}{2}v_1^2 = gh_1,$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 = gh_2,$$

где v_1, v_2 — скорости вытекания воды из соответствующих отверстий. Пусть струи пересекаются в точке (x, y), где x — расстояние от края башни по горизонтали, а y — искомое расстояние от верхнего края воды. Поскольку струи изначально горизонтальны, имеем

$$x = v_1 t_1, \quad h_1 - y = \frac{1}{2}gt_1^2$$

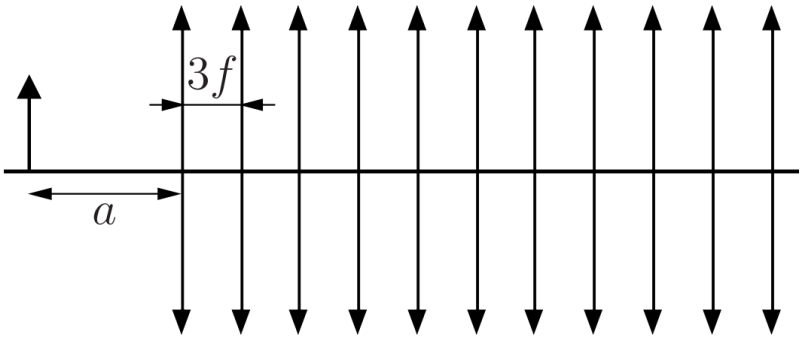
$$x = v_2 t_2, \quad h_2 - y = \frac{1}{2}gt_2^2$$

где t_1 и t_2 — время, за которое небольшой объём жидкости, вытекающий из соответствующего отверстия, достигнет точки (x, y). После преобразований получим:

$$y = h_1 + h_2 = 1{,}4 \text{ м}.$$

Ответ: 1,4 м.

3. Наткнувшись на коробку с одинаковыми тонкими собирающими линзами с фокусным расстоянием f, Лиза решила выстроить все одиннадцать линз в ряд с расстоянием $3f$ между ними, а на расстоянии a от первой линзы расположить карандаш. Каким будет изображение карандаша?



Решение

Обозначим x_i, y_i — расстояния предмета или изображения от i-й линзы, а p_i — её увеличение. Для первой линзы: изображение находится на расстоянии y_1 от линзы (если $y_1 > 0$, то справа от неё),

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a},$$

$$y_1 = \frac{af}{a-f}.$$

Увеличение первой линзы

$$p_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{f}{a-f}.$$

Для второй линзы: расстояние до предмета

$$x_2 = 3f - y_1 = \frac{f(2a-3f)}{a-f}.$$

Заметим, что если $f < a < 3/2f$, то $x_2 < 0$, это означает, что лучи, падающие на вторую линзу, сходятся за ней («мнимый объект»). Это не мешает использовать формулу линзы:

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_2} = \frac{a-2f}{f(2a-3f)},$$

$$y_2 = \frac{f(2a-3f)}{a-2f}.$$

Увеличение второй линзы равно

$$p_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{a-f}{a-2f}.$$

Для третьей линзы:

$$x_3 = 3f - y_2 = \frac{f(a-3f)}{a-2f}, \frac{1}{y_3} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{a-3f},$$

$$y_3 = -(a-3f),$$

$$p_3 = \frac{y_3}{x_3} = -\frac{a-2f}{f}.$$

Заметим, что увеличение системы из трёх линз равно $p_1p_2p_3 = -1$. Причём для каждой линзы положительному значению увеличения соответствуют положительные значения x и y, т. е. перевёрнутому изображению (это кажется противоречием, но это обычная трактовка знаков в уравнении линзы). Мы видим, что блок из трёх линз не переворачивает изображение и не меняет его размер.

Для четвёртой линзы:

$$x_4 = 3f - y_3 = a,$$

так же как и для первой линзы.

Далее преобразования циклически повторяются с периодом 3, т. е. 11 линз дают то же изображение, что и 2 линзы. Расстояние до изображения от последней линзы равно

$$y_{11} = y_2 = \frac{f(2a-3f)}{a-2f},$$

следовательно, изображение является мнимым ($y_2 < 0$) при $3/2f < a < 2f$, и действительным в противном случае.

Увеличение набора линз равно

$$p = p_1p_2 = \frac{f}{a-2f},$$

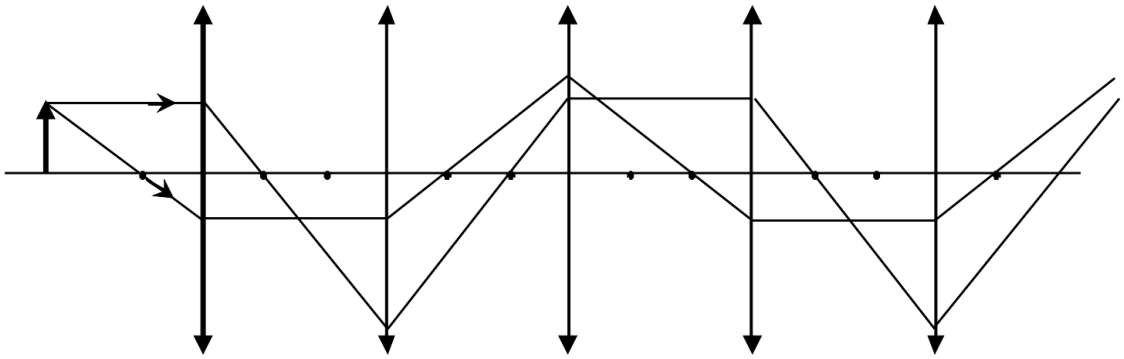


Рис. 40: Ход луча в системе линз

поэтому изображение перевёрнутое для $a < 2f$ и прямое для $a > 2f$.

Некоторые из приведённых выше выводов можно обосновать графически, построив ход луча, — см. рис. 40. Фокусы линз отмечены точками.

Ответ: расстояние до изображения от последней линзы равно $\dfrac{f(2a-3f)}{a-2f}$; изображение является мнимым при $3/2f < a < 2f$ и действительным в противном случае. Увеличение набора линз равно $\dfrac{f}{a-2f}$, изображение перевёрнутое для $a < 2f$ и прямое для $a > 2f$.

4. Как-то раз Соня и Теодор отправились встречать дедушку с рыбалки. Стоя на берегу, они всматривались в морскую гладь. Теодор первым заметил на горизонте очертания судна. Соня же смогла заметить судно лишь спустя $t = 1$ минуту. Зная, что судно плыло с постоянной скорость по направлению к детям, определите, с какой скоростью двигалось судно.

   Зрение Сони и Теодора считать идеальным, атмосферными эффектами пренебречь. Радиус Земли — $R = 6371$ км. Рост Теодора $H_1 = 170$ см, рост Сони $H_2 = 150$ см.

   Решение

   Получим расстояние s, на котором человек с ростом H начинает видеть корабль. Изобразим ситуацию на рисунке 41. Из прямоугольного треугольника получаем, что:

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+H}\,.$$

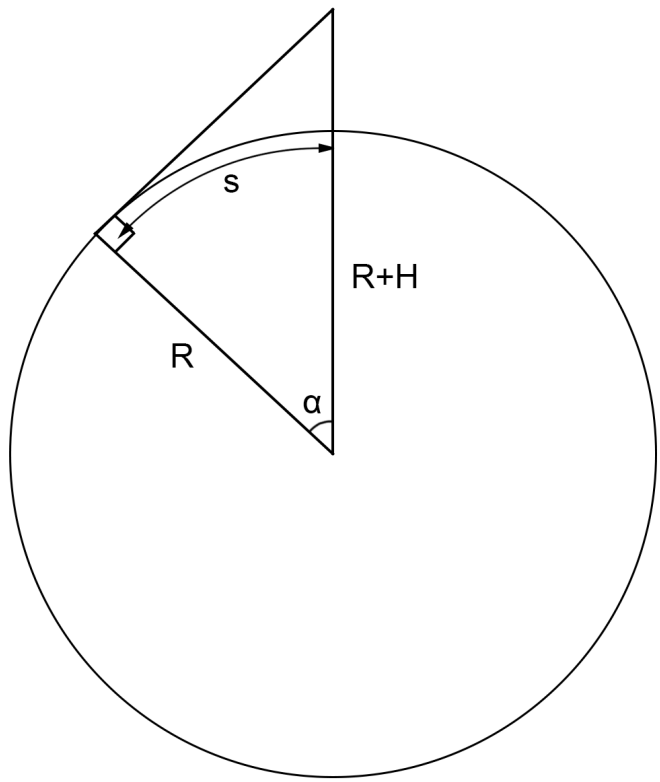


Рис. 41: Ситуация, при которой человек, находящийся на поверхности Земли, увидит корабль

Отсюда можем найти угол α для обоих детей. Для Теодора, чей рост составляет $H_1 =$ 170 см, получим

$$\cos\alpha_1 = \frac{6371\cdot 10^3}{6371\cdot 10^3 + 1{,}7} \approx 0{,}9999997332,\ \ \alpha_1 \approx 0{,}0418560499^\circ;$$

для Сони $H_2 = 150$ см

$$\cos\alpha_2 = \frac{6371\cdot 10^3}{6371\cdot 10^3 + 1{,}5} \approx 0{,}9999997646,\ \alpha_2 \approx 0{,}0393169133^\circ.$$

Расстояние s представляет собой длину дуги окружности, на которую опирается угол α. Значит,

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360^\circ};$$
$$s = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}.$$

Тогда для Теодора расстояние, на котором он увидит корабль,

$$s_1 = \frac{\pi R\alpha_1}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14\cdot 6371\cdot 10^3\cdot 0{,}0418560499^\circ}{180^\circ} \approx 4654{,}1 \text{ м}.$$

Для Сони —

$$s_2 = \frac{\pi R \alpha_2}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot 6371 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0393169133^\circ}{180^\circ} \approx 4371{,}8 \text{ м}.$$

Тогда расстояние, которое прошёл корабль от момента, когда Теодор его увидел, до момента как его увидела Соня:

$$s_1 - s_2 \approx 282{,}3 \text{ м}.$$

Зная расстояние, которое прошёл корабль, и время, которое ему понадобилось, получим скорость:

$$v = \frac{s_1 - s_2}{t} \approx \frac{282{,}3}{60} = 4{,}705 \ \frac{\text{м}}{c} \approx 17 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Метод 2.

Получим расстояние, на котором человек с ростом H начинает видеть корабль. Из прямоугольного треугольника получаем, что

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+H} = \frac{1}{1+\frac{H}{R}}\,.$$

Так как рост детей много меньше радиуса Земли $H \ll R$, то угол α мал. Поэтому верна приближенная формула

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2},\ \alpha \ll 1.$$

Также можно преобразовать правую часть равенства, используя приближенную формулу

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x,\ x \ll 1.$$

Тогда

$$\alpha = \sqrt{\frac{2H}{R}}\,.$$

Зная угол, получим расстояние от корабля до детей на берегу:

$$s = \alpha R = \sqrt{2HR}\,.$$

Тогда расстояние, которое прошёл корабль после того, как Теодор его увидел, до момента как его увидела Соня:

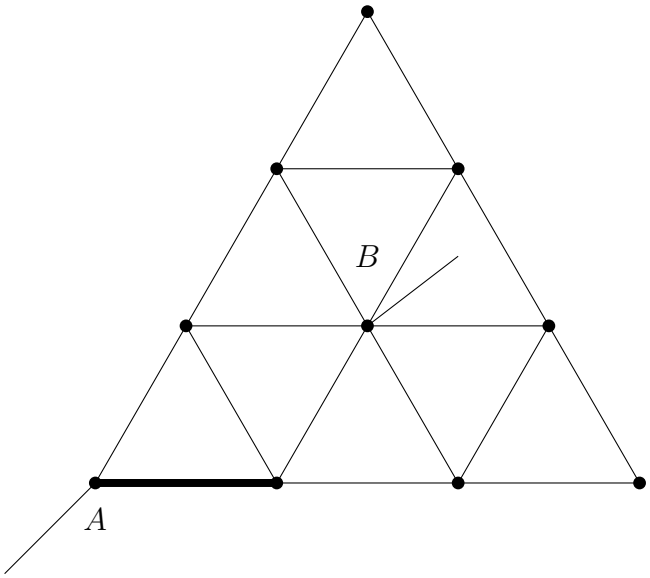
$$s_1 - s_2 = \sqrt{2R}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)\,.$$

Зная расстояние, которое прошёл корабль, и время, которое ему понадобилось, получим скорость:

$$v = \frac{s_1 - s_2}{t} = \frac{\sqrt{2R}}{t}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right) = 17 \text{ км/ч}\,.$$

Ответ: 17 км/ч.

5. Теодор решил украсить квартиру с помощью гирлянды, изготовленной из светодиодной ленты. Для этого он смастерил гирлянду в виде ёлки (по крайней мере, так ему казалось). Углы между всеми звеньями гирлянды равны 60°. Сопротивление звена гирлянды, выделенного жирным, равно R. Звенья, имеющие одинаковую длину, имеют одинаковое сопротивление. Определите сопротивление получившейся гирлянды между точками A и B.



Решение

Уже с первого взгляда на соединение мы можем заметить, что всё соединение в некоторой степени симметрично относительно точек A и B. Будем искать точки с равным потенциалом.

Из определения напряжения мы знаем, что напряжение между некоторыми точками — это разница их потенциалов. Итак, если две точки имеют одинаковое значение потенциала, напряжение между ними равно нулю. Если мы соединим эти две точки проводом, ток по этому проводу всё равно не потечёт, согласно закону Ома. Самый простой

способ найти эти эквипотенциальные точки — использовать симметрию: если электрическая цепь симметрична между точками, в которые втекает и вытекает ток (в нашем случае A и B), соответствующие точки будут иметь одинаковый потенциал. В нашем случае мы можем найти четыре пары эквипотенциальных точек, которые обозначим X, Y, Z и Q.

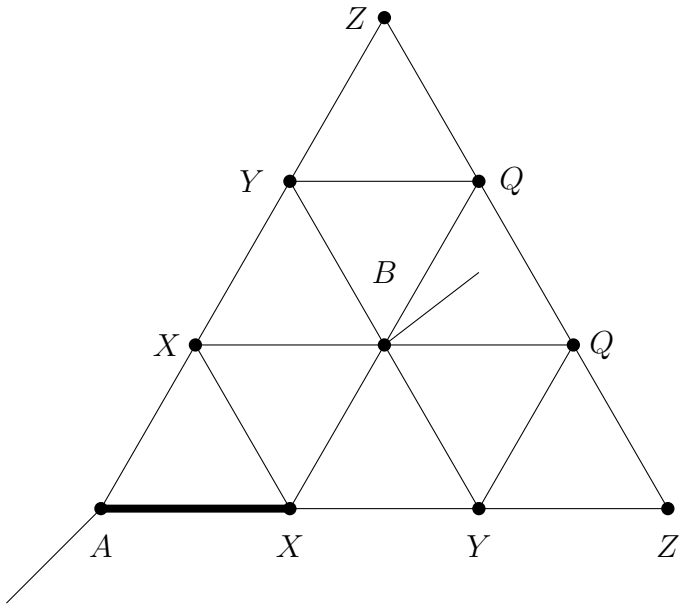


Рис. 42: Схема с обозначением точек равного потенциала

Почему мы назвали точки одинаково? Представим, что мы берём провод и соединяем каждую пару точек (ток по проводу всё равно течь не будет). Затем укорачиваем провод так, чтобы каждая пара точек с точки зрения электрической схемы сливалась в одну точку. Далее перерисовываем схему, изобразив все точки на бумаге, и начинаем соединять их резисторами. Если какие-то две точки соединены более чем одним резистором (например, точка A соединена с точкой X двумя путями), на эквивалентной схеме это соединение представим как параллельное соединение. Тогда получим следующую схему:

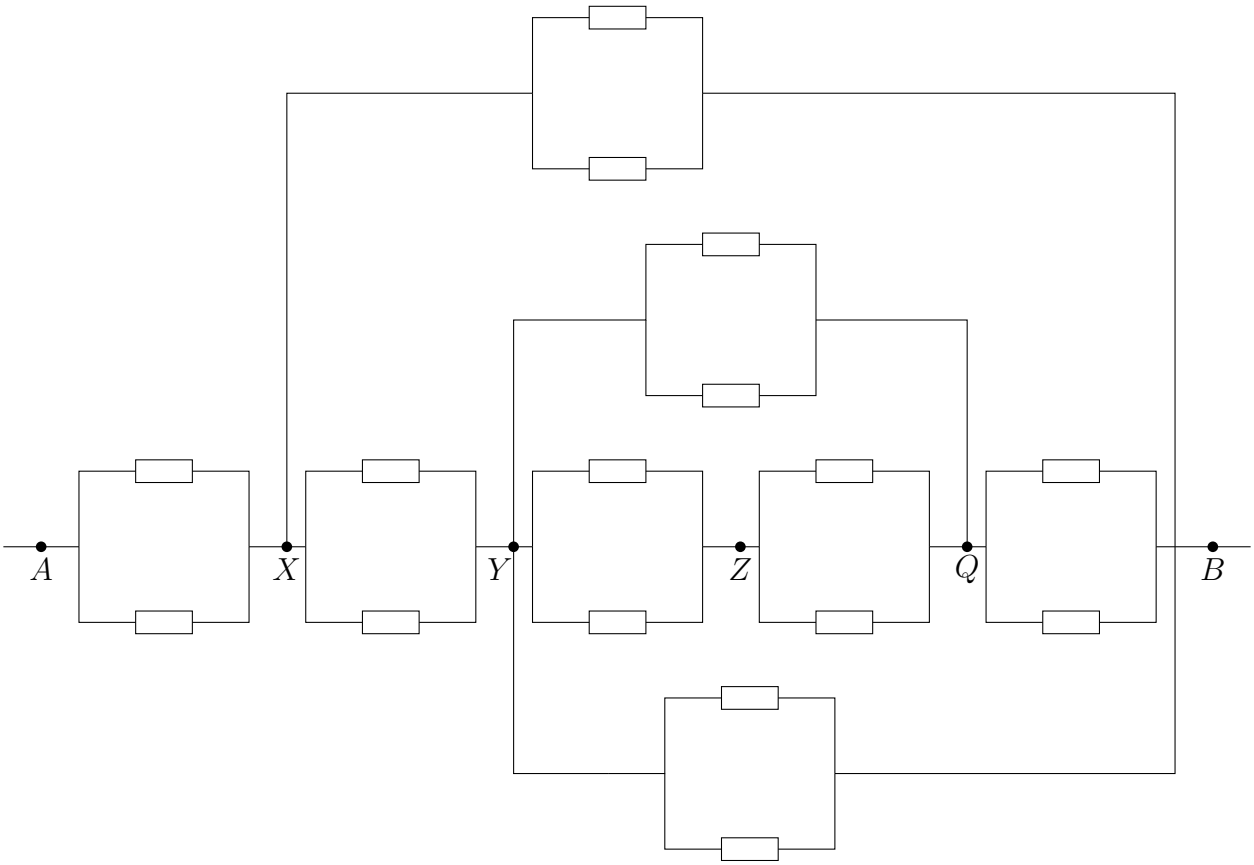


Рис. 43: Эквивалентная цепь

Сопротивление такой схемы уже найти несложно. Параллельное соединение между точками Y и Q имеет сопротивление

$$r_{YQ} = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2r}{3},$$

где $r = R/2$ — сопротивление одной пары параллельно подключённых резисторов. Таким образом, ветвь за точкой Y имеет сопротивление

$$r_{YB} = \frac{r\left(\frac{2}{3}r + r\right)}{r + \frac{2}{3}r + r} = \frac{5}{8}r.$$

Тогда общее сопротивление между точками A и B равно

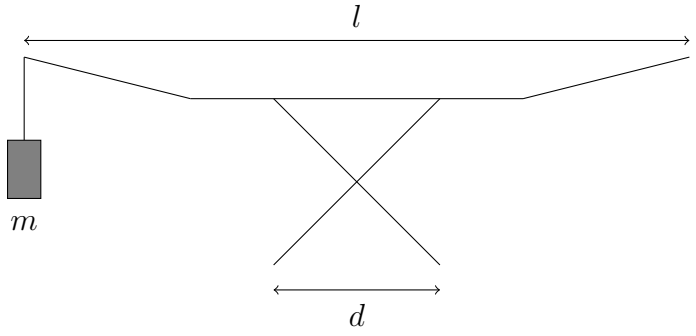
$$r_{AB} = r + \frac{\left(r + \frac{5}{8}r\right)r}{r + \frac{5}{8}r + r} = r + \frac{13r}{21} = \frac{34r}{21}.$$

Подставив $r = R/2$, получим

$$R_{AB} = \frac{34}{21}\frac{R}{2} = \frac{17}{21}R \approx 0{,}81R.$$

Ответ: $\frac{17}{21}R$.

6. В одно воскресенье мама Теодора и Лизы решила устроить большую стирку. У них дома есть сушилка для белья, схематично изображённая на рисунке, на которую развешивают бельё сразу после стирки.



Ширина сушилки $l = 180$ см, размах её ножек $d = 60$ см, её масса $M_c = 2$ кг.

Когда мама равномерно развесила мокрое бельё массой $M_0 = 6$ кг, Лиза заметила, что Теодор к левому краю сушилки подвесил $m = 3$ кг грецких орехов, и задумалась, через сколько времени сушилка опрокинется. По своим наблюдениям, Лиза знает, что масса сухой одежды $M_1 = 2$ кг, вода с одежды испаряется равномерно, и вся одежда полностью высыхает за сутки.

Помогите Лизе определить время, через которое сушилка с бельём рухнет.

Решение

Найдём координату центра масс системы, состоящей из сушилки, грецких орехов и развешанного белья в начале процесса сушки:

$$x_0 = \frac{m\frac{l}{2}}{m + M_0 + M_c} \approx 24{,}5 \text{ см}.$$

Начало координат совпадает с центром сушилки, ось Ox направлена горизонтально влево. В конце процесса сушки центр масс переместится в точку с координатой

$$x_1 = \frac{m\frac{l}{2}}{m + M_1 + M_c} \approx 38{,}6 \text{ см}.$$

Исходя из того, что размах ножек сушилки $d = 60$ см, можно заметить, что если центр масс системы сместится на расстояние более $x_{max} = \frac{d}{2}$, сушилка упадёт. Мы получили, что $x_1 > x_{max}$, то есть сушилка упадёт до того, как всё бельё высохнет.

Получим минимальную массу белья, при которой сушилка ещё не опрокинется:

$$x_{max} = \frac{m\frac{l}{2}}{m + M_{min} + M_c};$$
$$M_{min} = \frac{ml}{2x_{max}} - m - M_c = 4 \text{ кг}.$$

Если бельё сохнет равномерно, оно достигнет этой массы через

$$\tau = \frac{M_{min} - M_1}{M_0 - M_1} T,$$

где $T = 24$ часа. Тогда

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 \text{ часов}.$$

Ответ: 12 часов.

13 Младшая высшая лига. Бой за 3 место

1. В некотором опыте к пружине подвешивают грузы и замеряют её длину. Выяснилось, что если подвесить к пружине груз массы 1 кг, то длина пружины равна 6 см, а если масса груза равна 2 кг, то пружина растягивается до 7 см. Найдите длину пружины в нерастянутом состоянии (без груза).

   Решение

   Пусть исходная длина пружины равна l_0, а её жёсткость — k. Запишем условия равновесия груза в обоих случаях:

   $$\begin{cases} k(l_1 - l_0) = m_1 g\,, \\ k(l_2 - l_0) = m_2 g\,. \end{cases}$$

   Решая эту систему уравнений, получаем $l_0 = 5$ см.

   Ответ: $l_0 = 5$ см.

2. Теодор решил украсить квартиру с помощью гирлянды, изготовленной из лампочек сопротивлением 10 Ом каждая. Однако перед этим он вытащил печеньку с предсказанием, которое гласило, что число 7 принесёт ему удачу, поэтому он решил, что сопротивление его гирлянды должно составлять 7 Ом. К тому же Теодор довольно экономный, поэтому хочет потратить на изготовление гирлянды минимальное количество лампочек. Помогите Теодору изготовить гирлянду (нарисуйте схему цепи).

   Решение

   Для удобства будем на схеме лампочки изображать как резисторы, сопротивление каждого из них составляет 10 Ом.

   Очевидно, что сопротивление цепи, представленной на рисунке 44, составляет 7 Ом. Данная цепь состоит из 6 лампочек. Покажем, что меньшим числом лампочек это сделать не удастся.

   Рассмотрим гирлянду из 2 лампочек. Их можно соединить последовательно, тогда сопротивление составит $R_{21} = 20$ Ом, а можно соединить параллельно, тогда сопротивление составит $R_{22} = 5$ Ом.

   Третью лампочку можно

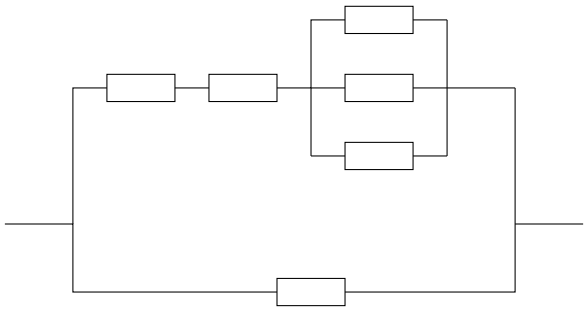


Рис. 44: Гирлянда из 6 ламп сопротивлением 10 Ом, имеющая сопротивление 7 Ом

(a) последовательно присоединить к R_{12}, тогда сопротивление составит $R_{31} = 30$ Ом;

(b) последовательно присоединить к R_{22}, тогда сопротивление составит $R_{32} = 15$ Ом;

(c) параллельно присоединить к R_{12}, тогда сопротивление составит

$$R_{33} = \frac{RR_{21}}{R + R_{21}} = \frac{20}{3} \text{ Ом};$$

(d) параллельно присоединить к R_{22}, тогда сопротивление составит

$$R_{34} = \frac{RR_{22}}{R + R_{22}} = \frac{10}{3} \text{ Ом}.$$

Добавляя R к имеющимся цепям из 3 лампочек, получим гирлянды из 4 лампочек:

$$R_{41} = R + R_{31} = 40 \text{ Ом};$$
$$R_{42} = R + R_{32} = 25 \text{ Ом};$$
$$R_{43} = R + R_{33} = \frac{50}{3} \text{ Ом};$$
$$R_{44} = R + R_{34} = \frac{40}{3} \text{ Ом};$$
$$R_{45} = \frac{RR_{31}}{R + R_{31}} = \frac{15}{2} \text{ Ом};$$
$$R_{46} = \frac{RR_{32}}{R + R_{32}} = 6 \text{ Ом};$$
$$R_{47} = \frac{RR_{33}}{R + R_{33}} = 4 \text{ Ом};$$
$$R_{48} = \frac{RR_{34}}{R + R_{34}} = \frac{5}{2} \text{ Ом}.$$

Можем также соединить цепи из 2 резисторов между собой:

$$R_{49} = R_{21} + R_{21} = 40 \text{ Ом};$$
$$R_{4\ 10} = R_{21} + R_{22} = 25 \text{ Ом};$$

$$R_{4\ 11} = \frac{R_{21}}{2} = 10 \text{ Ом};$$
$$R_{4\ 12} = \frac{R_{22}}{2} = \frac{5}{2} \text{ Ом};$$
$$R_{4\ 13} = \frac{R_{21}R_{22}}{R_{21}+R_{22}} = 4 \text{ Ом}.$$

Цепь из 5 резисторов можно получить одним из следующих способов:

(a) Подсоединяя R к цепи из 4 резисторов последовательно:

$$7 \text{ Ом} = R + R_x,\ R_x = -3 \text{ Ом},$$

что невозможно.

(b) Подсоединяя R к цепи из 4 резисторов параллельно:

$$\frac{10R_x}{10+R_x} = 7,\ \ R_x = \frac{70}{3} \text{ Ом},$$

таких резисторов нет среди $R_{41} - R_{4\ 13}$.

(c) Подсоединяя R_{21}, R_{22} к цепи из трех резисторов последовательно:

$$R_x + 20 = 7,\ R_x = -13 \text{ Ом}$$

и

$$R_x + 5 = 7,\ R_x = 2 \text{ Ом}.$$

(d) Подсоединяя R_{21}, R_{22} к цепи из трех резисторов параллельно:

$$\frac{20R_x}{20+R_x} = 7 \text{ Ом};$$
$$R_x = \frac{140}{13} \text{ Ом};$$
$$\frac{5R_x}{5+R_x} = 7 \text{ Ом};$$
$$R_x = \frac{35}{2} \text{ Ом}.$$

(e) Можно соорудить мостовую цепь, но в силу равенства сопротивлений плеч моста ток по центральному резистору течь не будет, что приводит нас к уже рассмотренному выше случаю с четырьмя резисторами. Эти случаи невозможны, что и требовалось показать.

Таким образом, экономный Теодор должен изготовить гирлянду из 6 лампочек.

Ответ: см. рисунок 44.

3. Теодор проводит испытания плавучести пары брусков из различных типов пенопласта. Больший брусок имеет массу $m_1 = 250$ г. При опускании в воду он погружается на четверть своего объёма. Если закрепить на нём второй брусок, то большой брусок погрузится на 75 %, после чего вся конструкция перевернётся. В результате скреплённые бруски погружены в воду так, что ровно половина большого бруска торчит над водой. В рамках этого нехитрого опыта Теодор смог определить массу и плотность меньшего бруска. Каковы они оказались? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Решение

Пусть ρ_1 и V_1 — плотность и объём большего бруска, m_1 — масса бруска, ρ_2, V_2 и m_2 — плотность, объём и масса второго бруска. Запишем условие равновесия в случае, когда брусок плавает без груза

$$m_1 g = \frac{1}{4}\rho_0 V_1 g.$$

Произведя упрощения, получим

$$\rho_1 = \frac{1}{4}\rho_0.$$

Равновесие во втором случае:

$$m_1 g + m_2 g = \frac{3}{4}\rho_0 V_1 g.$$

И, соответственно,

$$m_2 = \rho_2 V_2 = \frac{1}{2}\rho_0 V_1 = \frac{m_1}{2\rho_1}\rho_0 = 2m_1 = 500 \text{ г}.$$

После переворота

$$m_1 g + m_2 g = \frac{1}{2}\rho_0 V_1 g + \rho_0 V_2 g.$$

Откуда имеем

$$m_2 = \frac{1}{4}\rho_0 \frac{m_1}{\rho_1} + \rho_0 \frac{m_2}{\rho_2}.$$

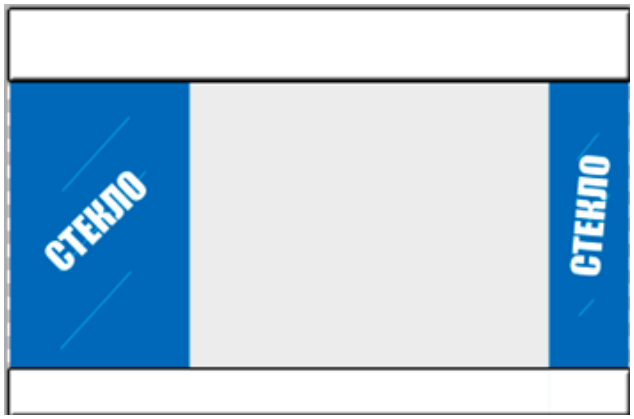
Тогда выразим искомую плотность:

$$\rho_2 = \frac{\rho_0 m_2}{m_2 - m_1} = 2 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $m_2 = 500$ г, $\rho_2 = 2$ г/см^3.

4. Домашний козодой Валерий, устав от надоедливых людей, пользуясь случаем, впадает зимой в спячку, при этом наиболее комфортной для него температурой окружающей среды является температура от 5 до 15°C. Между двумя стёклами спать удобнее всего. В помещении, где живёт Валерий, есть два окна, в каждом окне — две рамы: одна с толстым стеклом, а другая с тонким (см. рисунок). Невнимательные строители установили рамы по-разному: в одном окне они поставили раму с толстым стеклом наружу, а в другом — с тонким. Толстое стекло 1 см толщиной, тонкое — 0,5 см, а расстояние между рамами — 10 см. В помещении температура составляет +20°C, на улице — около −10°C.

   Помогите Валерию выбрать себе нужное окно для зимовки. Мощность тепловых потерь считать пропорциональной разности температур, а в силу конвекции, температуру между стёклами считать одинаковой во всём объёме. Считайте, что температура внутри стекла изменяется линейно.



Решение

Введём обозначения: T_1 — температура на улице, T_2 — температура между стёклами, T_3 — температура в помещении, k — коэффициент пропорциональности, D — толщина толстого стекла, d — толщина тонкого стекла.

Можем записать в первом случае для первого стекла:

$$T_2 - T_1 = kD, \tag{9}$$

для второго стекла:

$$T_3 - T_2 = kd, \tag{10}$$

(9) + (10):

$$T_3 - T_1 = k(D + d) \Rightarrow k = \frac{T_3 - T_1}{D + d}.$$

Выразив из (9) T_2 получим

$$T_2 = kD + T_1 = (T_3 - T_1)\frac{D}{D + d} + T_1 = 10°C.$$

Во втором случае нужно лишь заменить D на d и наоборот

$$T_2' = (T_3 - T_1)\frac{d}{D + d} + T_1 = 0°C$$

Таким образом, только первый вариант попадает в нужный диапазон.

Ответ: Валерию нужно окно с толстым стеклом наружу.

5. Обнаружив отсутствие холодной воды, Маша не отчаялась и не стала менять свои планы принять ванну. Измерив температуру горячей воды ($60°C$) и поставив рядом с собой морозильный ящик, наполненный льдом, она начала набирать воду. Для поддержания комфортной для себя температуры $35°C$ Маше пришлось добавлять по кубику льда через каждые 7 секунд всё время, пока набиралась вода. Когда Маша решила повторить процедуру через несколько дней, обнаружилось, что температура горячей воды изменилась, и добавлять кубики льда пришлось уже через каждые 5 секунд (все остальные условия остались прежними). Считать процесс теплопередачи быстрым и пренебречь потерями тепла. Какой была температура горячей воды во второй раз?

Решение

Пусть масса налитой из крана воды составляет M, а m - общая масса льда, добавленного для получения комфортной температуры.

$$(T_1 - T_2)c_w M = m(c_w T_2 + \lambda + c_{\text{ice}} T_{\text{ice}}),$$

где T_1 — температура воды в кране, T_2 — комфортная температура воды, T_{ice} — температура льда, c_w — удельная теплоёмкость воды, c_{ice} — удельная теплоёмкость льда и λ — удельная теплота плавления льда, тогда получаем

$$m = \frac{(T_1 - T_2)c_w M}{c_w T_2 + \lambda + c_{\text{ice}} T_{\text{ice}}}.$$

Заметим, что $m \sim 1/t$, где t — промежуток времени между бросанием кубиков льда. Тогда верна следующая зависимость:

$$\frac{m}{m'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1' - T_2} = \frac{t_2}{t_1},$$

где штрихованные m', T' обозначают массу добавленного льда и температуру горячей воды при втором принятии ванны. Отсюда выразим

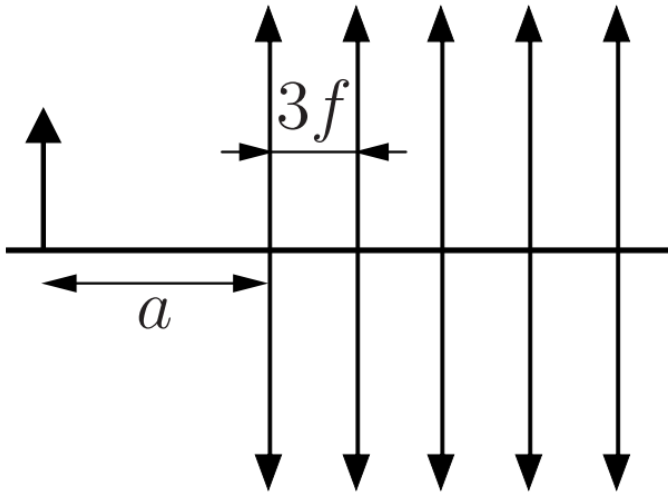
$$T_1' = T_2 + (T_1 - T_2)\frac{t_1}{t_2} = 70°C,$$

тогда искомая разница температур равна

$$\Delta T = |T' - T| = 10°C.$$

Ответ: температура изменилась на 10°.

6. Наткнувшись на коробку с одинаковыми тонкими собирающими линзами с фокусным расстоянием f, Лиза решила выстроить все пять в ряд с расстоянием $3f$ между ними, а на расстоянии $a = \frac{1}{2}f$ от первой линзы расположить карандаш. Каким будет изображение карандаша?



Решение

Решение в общем случае для любого значения a приведено на странице 96.

В нашем случае $a = \frac{1}{2}f$. Расстояние до изображения от последней линзы равно

$$\frac{f(2a-3f)}{a-2f} = \frac{4}{3}f,$$

изображение является действительным. Увеличение набора линз равно

$$\frac{f}{a-2f} = -\frac{2}{3},$$

изображение перевёрнутое.

Ответ: расстояние до изображения от последней линзы равно $\frac{4}{3}f$, изображение является действительным. Увеличение набора линз равно $-\frac{2}{3}$, изображение перевёрнутое.

14 Младшая первая лига

1. В некотором опыте к пружине подвешивают грузы и замеряют её длину. Выяснилось, что если подвесить к пружине груз массы 1 кг, то длина пружины равна 6 см, а если масса груза равна 2 кг, то пружина растягивается до 7 см. Найдите длину пружины в нерастянутом состоянии (без груза).

   Решение задачи приведено на странице 106.

2. Теодор рассматривает параллельное соединение резистора сопротивления R и реостата, который может принимать значения от $\dfrac{R}{2}$ до $2R$. Каково наименьшее возможное сопротивление данной схемы?

   Решение

   Пусть r — сопротивление реостата. Тогда общее сопротивление цепи R^* вычисляется по формуле
   $$R^* = \frac{rR}{r+R} = \frac{R}{1+R/r}\,.$$
   Из последнего равенства видно, что R^* — монотонно возрастающая функция от r, тогда наименьшее сопротивление R^*_m достигается при $r = R/2$:
   $$R^*_m = \frac{R}{1+2} = \frac{R}{3}\,.$$

   Ответ: $\dfrac{R}{3}$.

3. Теодор проводит испытания плавучести пары брусков из различных типов пенопласта. Больший брусок имеет массу $m_1 = 250$ г. При опускании в воду он погружается на четверть своего объёма. Если закрепить на нём второй брусок, то большой брусок погрузится на 75 %, после чего вся конструкция перевернётся. В результате скреплённые бруски погружены в воду так, что ровно половина большого бруска торчит над водой. В рамках этого нехитрого опыта Теодор смог определить массу и плотность меньшего бруска. Каковы они оказались? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

   Решение задачи приведено на странице 109.

4. Две одинаковые жидкости с температурами T_1 и T_2 слили в пропорции 1 : 2. Найдите конечную температуру смеси.

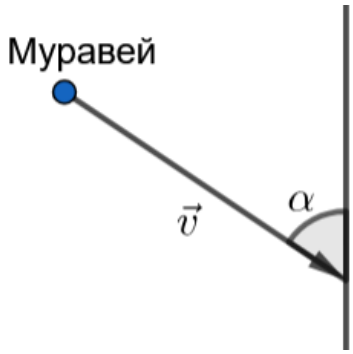
Решение

Конечную температуру T можно найти из уравнения теплового баланса:

$$m_1c(T-T_1)+m_2c(T-T_2)=0 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{m_1T_1+m_2T_2}{m_1+m_2}=\frac{T_1+2T_2}{1+2}=\frac{T_1+2T_2}{3}\,.$$

Ответ: $T=\dfrac{T_1+2T_2}{3}$.

5. Муравей ползёт рядом с плоским зеркалом со скоростью $v=1$ см/с, причём его скорость направлена под углом $\alpha=30^\circ$ к плоскости зеркала. С какой скоростью сближаются муравей и его изображение?



Решение

Видно, что муравей приближается к зеркалу со скоростью

$$v'=v\sin\alpha=0{,}5 \text{ см/с}.$$

Тогда со своим изображением он сближается со скоростью 1 см/с.

Ответ: 1 см/с.

6. Сосновая стрела влетает в доспех и полностью останавливается. Определите, насколько нагреется стрела, если она летит со скоростью 75 м/с. Удельная теплоёмкость древесины равна примерно 2300 Дж/кг°C.

Решение

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mc\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v^2}{2c} \approx 1{,}2^\circ C\,.$$

Ответ: $1{,}2^\circ C$.