Физические бои 2023
Задачи и решения

Томск

Физические бои 2023

Задачи и решения

Жлудько Н.В., Куликова А.В., Рякин В.А., Щербатов Д.Я.

Томск – 2023

Оглавление

9 декабря 2023 года **2**

1 Старшая высшая лига 2

2 Младшая высшая лига 12

3 Старшая первая лига 23

4 Младшая первая лига 28

10 декабря 2023 года **33**

5 Старшая высшая лига. Финал 33

6 Старшая высшая лига. Бой за 3 место 46

7 Младшая высшая лига. Финал 54

8 Младшая высшая лига. Бой за 3 место 63

9 Старшая первая лига 67

10 Младшая первая лига 71

9 декабря 2023 года

1 Старшая высшая лига

1. Как-то раз у Маргариты Леонидовны перестал работать телевизор, и так как эта прекрасная женщина не может пропустить свой любимый сериал, ее сосед, подполковник в отставке оказался вынужден искать причину поломки антенны. Именно таким образом в одном помещении оказались считающая себя полноправной хозяйкой квартиры болонка Элла, проснувшаяся среди зимы муха и кот подполковника Котофей Ярофеевич.

   На столе слегка подслеповатой Маргариты Леонидовны на штативе установлено увеличительное стекло, а над оптической осью на расстоянии a от увеличительного стекла летит муха. Муха летит со скоростью v перпендикулярно оптической оси. Кот наблюдает за мухой, в то время как болонка наблюдает за изображением мухи. Мы не можем не сравнить эти два движения. Найдите скорость изображения мухи (направление и значение), если фокусное расстояние линзы $f < a$.

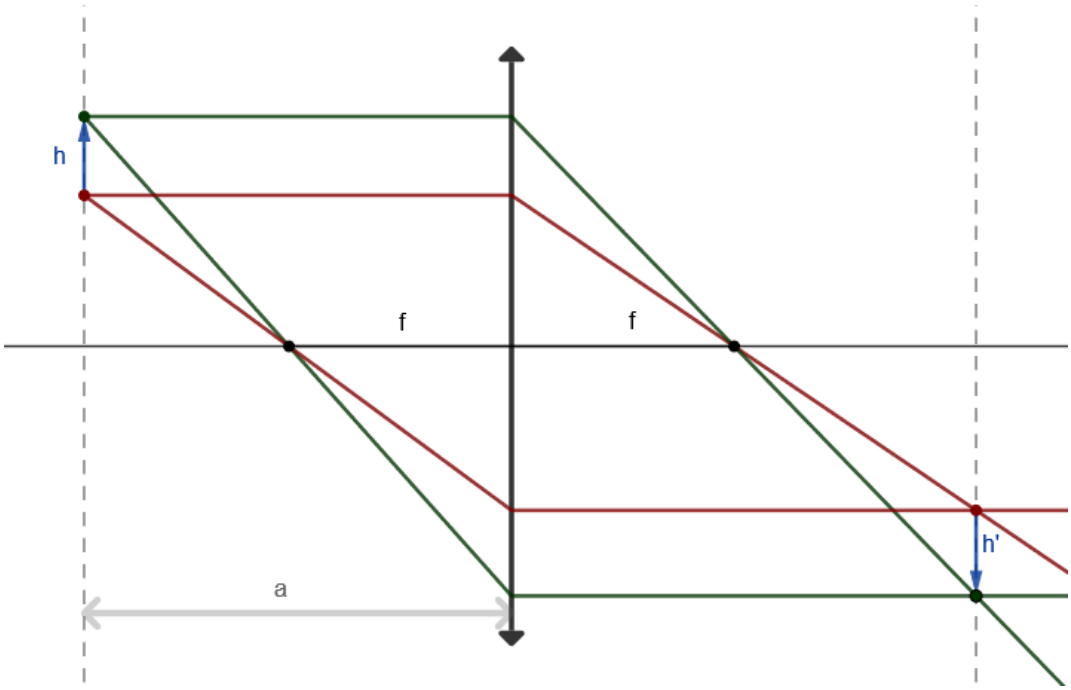


Рис. 1: Построение изображения мухи в увеличительном стекле

Решение.

Траектория полета мухи за короткое время t представляет собой отрезок длины $h = vt$. На рисунке 1 мы построили изображение мухи. Из подобных треугольников можно найти перемещение изображения h':

$$\frac{h}{a-f} = \frac{h'}{f} \Rightarrow h' = \frac{f}{a-f}h.$$

Следовательно, скорость изображения мухи равна

$$v' = \frac{h'}{t} = \frac{f}{a-f}\frac{h}{t} = \frac{f}{a-f}v$$

и имеет направление, противоположное скорости мухи.

Ответ: $\dfrac{f}{a-f}v$, противоположно скорости мухи.

2. У Маргариты Леонидовны на огороде уродилось много смородины. В силу вредности делиться ягодой с внуками или соседями она не захотела, поэтому решила варить из смородины джем. У Маргариты Леонидовны есть цилиндрические стеклянные банки

высотой $h = 7{,}0$ см и внутренним радиусом $r = 2{,}5$ см. Она взяла одну из банок, налила в неё горячий смородиновый джем температурой $t_0 = 80^\circ$ C, закрыла крышкой и поставила остывать. Банку она заполнила не доверху, а оставила немного воздуха между джемом и крышкой. Если к крышке прикладывается сила не менее $F = 4$ Н, слышен звук внезапного выгибания крышки, который очень пугает Эллу, болонку Маргариты Леонидовны. Через 30 минут после закрытия банки Элла услышала хлопок и заметалась по квартире. В этот момент Маргарита Леонидовна вспомнила про джем и решила его проверить. Мы знаем, что джем затвердевает при температуре $t_{\text{тв}} = 60^\circ$ C, — был ли он твёрдым, когда Маргарита Леонидовна пришла его проверять? Считайте атмосферное давление P_0 равным 10^5 Па.

Решение.

Когда джем налили в банку, его температура была равна $T_0 = 353$ К. Воздух над ним нагреется до той же температуры. Итак, в банке изначально находится воздух с температурой T_0 и давлением P_0, равным атмосферному. Затем банка (и воздух внутри) начинает остывать. Объём воздуха внутри банки не изменяется, таким образом, происходит изохорное охлаждение. Крышка выгибается, когда на неё действует сила F из-за разницы давлений воздуха внутри и снаружи банки:

$$F = (P_0 - P_1)\,S,$$
$$P_1 = P_0 - \frac{F}{S}.$$

Здесь P_1 — давление внутри банки, при котором прогибается крышка, $S = \pi r^2$. Используя закон Шарля (будем считать воздух идеальным газом), получим

$$T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0} = T_0 \left(1 - \frac{F}{\pi r^2 P_0}\right).$$

Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па, тогда

$$T_1 = 353 \left(1 - \frac{4}{\pi \cdot 0{,}025^2 \cdot 10^5}\right) \approx 345{,}8 \text{ К}.$$

Таким образом, температура джема в момент выгибания крышки составит $72{,}8^\circ$ C, что больше, чем $t_{\text{тв}}$, значит, джем ещё не успеет затвердеть.

Ответ: Когда Маргарита Леонидовна проверила джем, он ещё не был твёрдым.

3. Представим, что мы живём в альтернативной вселенной, в которой у неподвижной частицы присутствует некое ненулевое значение энергии $E_0 = ma^2$, где m — масса частицы, a — некоторая постоянная. При этом если частица движется, то её энергия определяется законом

$$E = \sqrt{m^2a^4 + p^2a^2},$$

где $\vec{p}$ — вектор импульса частицы. Исследователь в этой вселенной обнаружил, что длина волны фотона меняется при взаимодействии с такой частицей, в том числе, если она покоилась. Причём изменение длины волны связано с углом, на который отклонился фотон. Определите по какому закону меняется длина волны относительно угла отклонения фотона. Известно, что в этой вселенной энергия фотона равна $E_\gamma = \dfrac{la}{\lambda}$ и, кроме того, выполнено соотношение $k^2 = \dfrac{l^2}{\lambda^2}$, где $\vec{k}$ — вектор импульса фотона, λ — длина волны, а l — константа.

Решение.

Примечание. Всюду в решении жирным шрифтом обозначены векторные величины.

Описанное явление — это эффект Комптона. Чтобы решить эту задачу, требуется записать закон сохранения энергии и закон сохранения импульса (штрихованные величины — это импульсы и длина волны после взаимодействия).

$$\frac{la}{\lambda} + ma^2 = \frac{la}{\lambda'} + \sqrt{m^2a^4 + \mathbf{p}'^2a^2},$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}'.$$

Фактически требуется выразить импульс $\mathbf{p}'$ и возвести его в квадрат, после чего подставить в закон сохранения энергии и избавиться в нём от корня:

$$\mathbf{p}'^2a^2 = a^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = \mathbf{k}^2a^2 + \mathbf{k}'^2a^2 - 2a^2kk'\cos\theta = \frac{l^2a^2}{\lambda^2} + \frac{l^2a^2}{\lambda'^2} - \frac{2l^2a^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta. \qquad (1)$$

Здесь k и k' — модули соответствующих векторов, а θ – угол, на который отклонится фотон после взаимодействия. С другой стороны, из закона сохранения энергии

$$\mathbf{p}'^2a^2 = \left(la\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + ma^2\right)^2 - m^2a^4 = \frac{l^2a^2}{\lambda^2} + \frac{l^2a^2}{\lambda'^2} - \frac{2l^2a^2}{\lambda\lambda'} + 2lma^3\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right). \qquad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получим

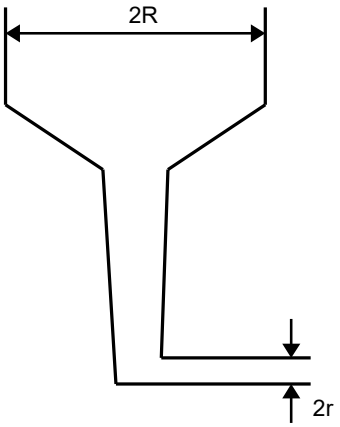
$$\frac{2l^2a^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta) = 2lma^3\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right).$$

Произведя несложные преобразования, найдём требуемое:

$$\lambda' - \lambda = \frac{l}{ma}(1 - \cos\theta).$$

Ответ: $\lambda' - \lambda = \dfrac{l}{ma}(1 - \cos\theta)$.

4. Соня хочет, чтобы у неё на Новый год было много-много конфет. Она представила, что конфеты высыпаются из стены её комнаты через воронку, изображённую на рисунке, а она ловит их ртом. Конфеты являются гладкими вкусными шоколадными сферами радиуса $r = 7$ мм. Радиус верхней части воронки $R = 5$ см. Шоколадные конфеты добавляются в верхнюю часть воронки со средней скоростью 5 шоколадных конфет в секунду, а уровень шоколадных конфет в ней при этом остаётся постоянным.



При случайном расположении шоколадные конфеты занимают 0,64 упаковки. Как быстро шоколадные конфеты вылетают из воронки в рот Сони? Какова средняя скорость падения шоколадных конфет в верхней части воронки?

Решение.

Из воронки одновременно может выйти только одна конфета, и каждая конфета должна пройти расстояние $2r$, для того чтобы покинуть воронку. Так как добавляется по 5 конфет в секунду, и уровень конфет в верхней воронке остаётся постоянным, то за одну секунду конфеты проходят расстояние $10r$. Следовательно, скорость вылета конфет из воронки в рот Соне $v_1 = 10r/t$, где $t = 1$ c.

То есть

$$v = \frac{10 \cdot 0{,}007}{1} = 0{,}07 \text{ м/с}.$$

В верхней части воронки шоколадные конфеты будут расположены в случайном порядке. Это значит, что 5 конфет, добавляемых в секунду, занимают объём

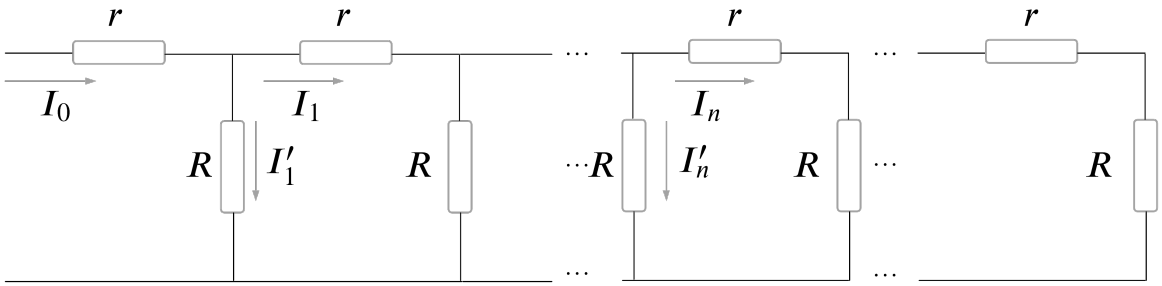
$$V = \frac{5}{n_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где n_0 — их плотность упаковки. Этот объём распределён по цилиндру с площадью поперечного сечения πR^2. Так как уровень конфет в верхней воронке остаётся неизменным, конфеты проходят в секунду в среднем расстояние, равное высоте этого цилиндра. Тогда

$$v_{\text{ср}} = \frac{5}{n_0} \cdot \frac{4\pi r^3}{3\pi R^2} = \frac{20r^3}{3n_0R^2} = \frac{20 \cdot 0{,}007^3}{3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}05^2} \approx 1{,}43 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}.$$

Ответ: 0,07 м/с, $1{,}43 \cdot 10^{-3}$ м/с.

5. Рассмотрим бесконечную цепь из резисторов. Входной ток I_0 указан на рисунке.



Получите рекуррентное соотношение, которому подчиняются токи I_n через горизонтальные резисторы r (выразите I_n через I_{n-1} и I_{n-2}). В случае, когда $R = r$, получите явную зависимость I'_n от n.

Решение.

Рекуррентные соотношения получаются из правил Кирхгофа. Из правила токов Кирхгофа получим, что

$$I_{n-1} = I_n + I'_n.$$

Из правила напряжений Кирхгофа получаем:

$$rI_n + RI'_{n+1} - RI'_n = 0.$$

Из уравнения для токов можно заметить, что

$$I'_{n+1} - I'_n = (I_n - I_{n+1}) - (I_{n-1} - I_n) = 2I_n - I_{n+1} - I_{n-1},$$

тогда уравнение для напряжений примет вид

$$I_{n+1} - \left(2 + \frac{r}{R}\right) I_n + I_{n-1} = 0.$$

Мы получили связь I_{n+1}, I_n и I_{n-1}, то есть требуемое рекуррентное соотношение.

Рассмотрим случай $R = r$ и получим зависимость I'_n от n.

Если $R = r$, рекуррентное соотношение примет вид

$$I_{n+1} - 3I_n + I_{n-1} = 0.$$

Пусть α и β — корни квадратного уравнения

$$\rho^2 - 3\rho + 1 = 0,$$

тогда

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$$
$$\beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2};$$
$$\alpha + \beta = 3;$$
$$\alpha \cdot \beta = 1.$$

Рекуррентное соотношение примет вид

$$I_{n+1} = \alpha I_n + \beta I_n - \alpha\beta I_{n-1}.$$

Применяя два способа группировки, получим два варианта этого выражения:

$$I_{n+1} - \alpha I_n = \beta \left(I_n - \alpha I_{n-1}\right);$$
$$I_{n+1} - \beta I_n = \alpha \left(I_n - \beta I_{n-1}\right).$$

Получается, что $I_{n+1} - \alpha I_n$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем β, а $I_{n+1} - \beta I_n$ — геометрическую прогрессию со знаменателем α. Тогда

$$I_{n+1} - \alpha I_n \sim \beta^n;$$
$$I_{n+1} - \beta I_n \sim \alpha^n.$$

Если первое выражение умножить на β, второе — на α и сложить их между собой, получим, что

$$I_n = A\alpha^n + B\beta^n = A\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

где A и B — коэффициенты, независящие от n. При $n \to \infty$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n \to \infty,$$

значит, коэффициент B должен быть равен нулю. Кроме того, при $n = 0$ мы должны получить I_0, тогда $A = I_0$ и

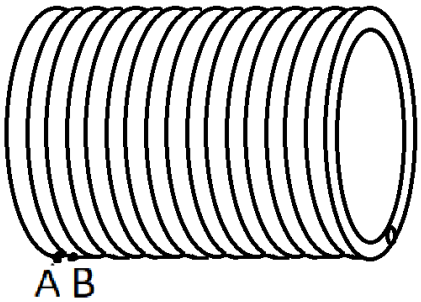
$$I_n = I_0\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

тогда по правилу Кирхгофа для токов

$$I'_n = I_{n-1} - I_n = I_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n.$$

Ответ: $I_{n+1} - \left(2 + \frac{r}{R}\right) I_n + I_{n-1} = 0$; $I'_n = I_{n-1} - I_n = I_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

6. При достаточно плотной спиральной обмотке индукционной катушки может возникнуть ситуация, когда точки и B, находящиеся на соседних витках, соприкасаются.



Соответственно, они могут расплавиться и спаяться при длительном использовании катушки. Рассмотрим ситуацию, в которой катушка, состоящая из M витков, теплоизолирована и её отключают от источника тока ровно в момент образования одной спайки. После этого её остужают до температуры, равной $T_0 = 0^\circ C$, и включают вновь и так далее. Необходимо определить, через какое время работы катушки (время остывания

не учитывается), образуется N спаек. Катушку подключают к источнику тока с постоянным напряжением U. Длина всей проволоки в катушке L, диаметр проволоки d, плотность материала проволоки ρ, удельное сопротивление ϕ, температура плавления T. Считать, что витки спаиваются только вдоль одной оси, на которой лежат точки A и B, а также, что сопротивление спайки R_{AB} в M раз меньше сопротивления в одном витке спирали.

Решение.

Запишем уравнение теплового баланса при помощи закона Джоуля–Ленца:

$$Q = \frac{U^2}{R}t = c\rho\frac{\pi d^2}{4}L(T - T_0)\,.$$

Понятно, что время, необходимое для образования N-й спайки, при учёте, что $(N-1)$-я спайка уже образовалась:

$$t_N = \frac{\pi}{4}\frac{c\rho L d^2}{U^2}TR_N := \alpha R_N,$$

где R_N — сопротивление катушки с $(N-1)$-й спайкой.

Определим сопротивление в зависимости от количества спаек. До образования первой спайки сопротивление будет

$$R_1 = \phi\frac{4L}{\pi d^2}.$$

После первого отключения от сети запуска при слиянии A и B сопротивление уменьшается — новая схема изображена на рисунке ниже.

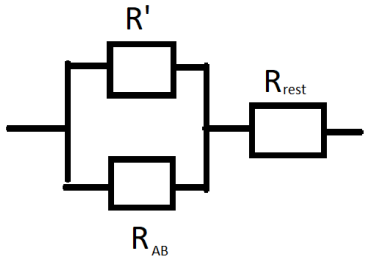


Рис. 2: Схема катушки после первой спайки

Соответственно,

$$R_{rest} = R_1 - R', \qquad R' = \phi\frac{4L}{\pi d^2 M} = \frac{R_1}{M}, \qquad R_{AB} = \frac{R'}{M} = \frac{R_1}{M^2},$$

тогда на втором шаге общее сопротивление будет

$$R_2 = R_1 - R' + \frac{R' R_{AB}}{R' + R_{AB}} = R_1 - \frac{R'^2}{R' + R_{AB}}.$$

Повторяя вычисления, можно получить

$$R_N = R_{N-1} - R' + \frac{R' R_{AB}}{R' + R_{AB}} = R_1 - \frac{(N-1)R'^2}{R' + R_{AB}} = R_1 \left(1 - \frac{N-1}{M+1}\right).$$

Искомое время есть следующая сумма:

$$t = \sum_{k=1}^{N} t_k = \alpha \sum_{k=1}^{N} R_k = \alpha R_1 \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k-1}{M+1}\right) =$$
$$= \alpha R_1^2 \left(N - \frac{N(N-1)}{2(M+1)}\right).$$

Ответ: $t = \dfrac{4c\rho\phi L^3 T}{\pi d^2 U^2} N \left(1 - \dfrac{(N-1)}{2(M+1)}\right).$

2 Младшая высшая лига

1. Лиза прочитала в энциклопедии, что люди внутри лифта могут выдерживать ускорение 2,5 м/с^2 без каких-либо серьезных последствий для здоровья, и ей приснился сон, что в лифте собрались её соседи: Геннадий Петрович, подполковник в отставке, Маргарита Леонидовна с 5 этажа с болонкой Эллой и пятиклассница Соня. И лифт двигался ввысь. Проснувшись, Лиза решила посчитать, на какой максимальный этаж лифт мог бы увезти её соседей за минуту так, чтобы у них не возникло серьёзных проблем со здоровьем. Для своих расчётов она предположила, что лифт движется равноускоренно в течение первой четверти времени, половину времени — с постоянной скоростью, а в оставшуюся четверть времени лифт равноускоренно замедляется.

Высота каждого этажа 3 метра. Лифт начинает движение с первого этажа. Какой ответ получила Лиза? В вычислительных способностях Лизы сомневаться не стоит.

Решение.

Время движения лифта $t = 60$ с. Пусть ускорение лифта на первом участке пути равно a. В начальный момент времени лифт неподвижен. Тогда его путь на этом промежутке

$$h_1 = \frac{a\left(\frac{t}{4}\right)^2}{2} = \frac{at^2}{32}.$$

Скорость лифта в конце первого промежутка

$$v = a\frac{t}{4}.$$

Второй участок пути лифт проходит равномерно с полученной выше скоростью, тогда пройденное им расстояние на этом участке —

$$h_2 = v\frac{t}{2} = a\frac{t}{4}\cdot\frac{t}{2} = \frac{at^2}{8}.$$

Конечная скорость лифта должна равняться нулю, следовательно, так как первый и третий участок пути проходятся лифтом за одинаковое время, ускорения на них совпадают по модулю. Значит, на третьем участке лифт пройдёт расстояние —

$$h_3 = v\frac{t}{4} - \frac{a\left(\frac{t}{4}\right)^2}{2} = \frac{at^2}{16} - \frac{at^2}{32} = \frac{at^2}{32}.$$

Общая высота, на которую поднимается лифт,

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = \frac{at^2}{32} + \frac{at^2}{8} + \frac{at^2}{32} = \frac{3at^2}{16}.$$

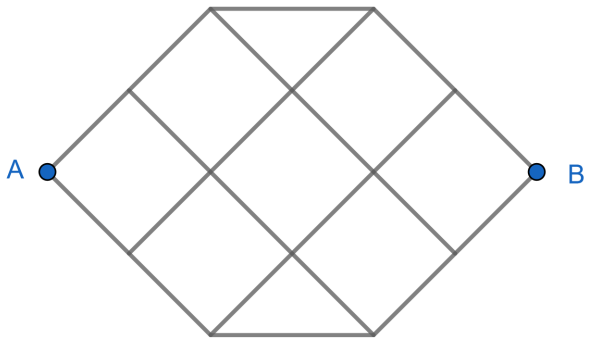
Нам требуется найти, на какой максимальный этаж поднимется лифт, то есть лифт должен проходить максимально возможное расстояние. Тогда возьмём в качестве a максимально возможное ускорение 2,5 м/с^2. Значит,

$$h = \frac{3 \cdot 2{,}5 \cdot 60^2}{16} = 1687{,}5 \text{ м}.$$

Следовательно, лифт проходит за минуту $\frac{1687{,}5}{3} = 562{,}5$ этажа. Значит, по подсчётам Лизы, лифт может увезти её соседей на 563-й этаж, считая первый, с которого лифт начинает движение.

Ответ: лифт может увезти соседей Лизы на 563-й этаж.

2. Мальчик Митя хочет сделать резистор с самым большим сопротивлением в мире — для этого он соединил резисторы так, как указано на рисунке. Однако его друг Теодор считает, что сопротивление этой цепи не так уж и велико. Правда ли это? Определите сопротивление между точками A и B, если каждый отрезок — резистор с известным сопротивлением r.



Решение.

Пронумеруем узлы цепи:

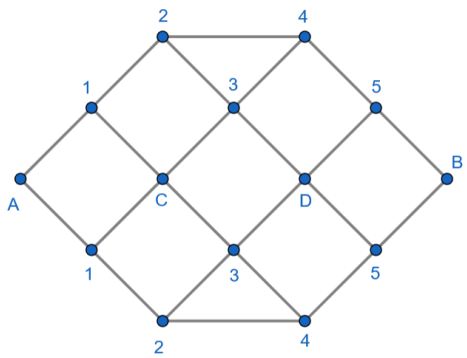


Рис. 3: Обозначения узлов цепи

Точки, отмеченные одинаковыми цифрами, имеют равные потенциалы в силу симметрии, тогда их можно считать одной и той же точкой эквивалентной цепи, которая выглядит следующим образом:

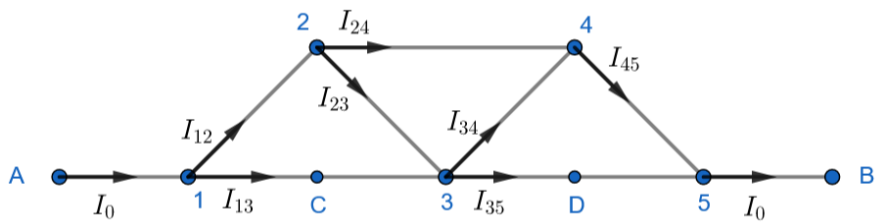


Рис. 4: Эквивалентная цепь

В последней цепи каждый отрезок имеет сопротивление $\frac{r}{2}$. Сопротивление данной цепи можно найти несколькими способами.

(a) **Вариант первый.** Применим для треугольников $1-2-3$ и $3-4-5$ эквивалентное преобразование треугольник–звезда:

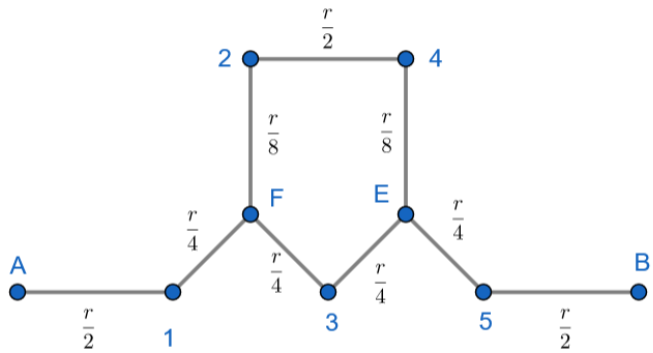


Рис. 5: Преобразованная цепь

Сопротивление последней цепи посчитать нетрудно, оно равно $R^* = \frac{9}{5}r$.

(b) **Вариант второй.** Запишем для данной цепи систему уравнений Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_0 - I_{12} - I_{13} = 0, \\ I_{12} - I_{13} - I_{23} = 0, \\ I_{13} + I_{23} - I_{34} - I_{35} = 0, \\ I_{24} + I_{34} - I_{45} = 0, \\ I_{35} + I_{45} - I_0 = 0, \\ I_{12} - 2I_{13} + I_{23} = 0, \\ I_{23} - I_{24} + I_{34} = 0, \\ I_{34} - 2I_{35} + I_{45} = 0. \end{cases}$$

Первые пять уравнений этой системы получаются применением первого закона Кирхгофа к каждому узлу цепи на рисунке 4, а последние три — применением второго закона Кирхгофа к каждому под-контуру той же цепи. Решая эту систему уравнений, получаем

$$I_0 = \frac{5}{3}I_{45},$$
$$I_{13} = I_{35} = \frac{2}{3}I_{45}.$$

Тогда напряжение между точками A и B равно

$$U = (I_0 + I_{13} + I_{35})r = \frac{9}{3}I_{45}R.$$

По закону Ома искомое сопротивление находится как

$$R^* = \frac{U}{I_0} = \frac{9}{5}r.$$

Ответ: $\frac{9}{5}r$.

3. Теодор и Лиза лето провели у бабушки с дедушкой в деревне. Одним из развлечений для них стала стрельба из лука. На доске Лиза нарисовала красной краской мишень и повесила её на дерево, а Теодор прочертил линию за 200 метров от дерева, обозначив

стартовую позицию. К концу лета, хорошенько пристрелявшись, они устроили соревнования. Чтобы не проиграть сестре, Теодор решил всё рассчитать. Помогите ему победить Лизу, определив угол α к горизонту, под которым нужно выстрелить, чтобы попасть ровно в центр мишени.

КПД лука $\eta = 0{,}17$, масса стрелы $m = 54$ г. Теодор выпускает стрелу на высоте своего плеча $h_{\text{Т}} = 160$ см, а центр мишени находится на высоте $h_{\text{ц}} = 90$ см. Работа Теодора при натяжении лука составляет $A = 500$ Дж. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Сперва обозначим разницу высот между начальным положением стрелы и центром мишени $h = h_{\text{Т}} - h_{\text{ц}}$. Выразим начальную скорость стрелы из кинетической энергии, сообщённой стреле:

$$E_K = \frac{mv^2}{2},$$

$$E_K = \eta A \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}17 \cdot 500}{0{,}054}} \approx 56{,}1 \text{ м/с}.$$

Заметим, что горизонтальная составляющая скорости

$$v_{\text{гор}} = v \cdot \cos\alpha,$$

а вертикальная —

$$v_{\text{верт}} = v \cdot \sin\alpha.$$

За время полёта t стрела пройдёт

$$v\cos\alpha \cdot t = L, \tag{3}$$

$$\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h. \tag{4}$$

Выразим $\sin\alpha$ из уравнения (3):

$$\cos\alpha = \frac{L}{vt} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{vt}\right)^2} = \sqrt{\frac{v^2t^2 - L^2}{v^2t^2}}.$$

Подставим в уравнение (4):

$$vt \cdot \sqrt{\frac{v^2t^2 - L^2}{v^2t^2}} = \frac{gt^2}{2} - h \Rightarrow$$

$$v^2t^2 - L^2 = h^2 - hgt^2 + \frac{g^2t^4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{g^2}{4} \cdot t^4 - \left(hg + v^2\right) \cdot t^2 + \left(h^2 + L^2\right) = 0.$$

Решим квадратное относительно t^2 уравнение:

$$t_{1,2}^2 = \frac{(hg + v^2) \pm \sqrt{(hg + v^2)^2 - 4 \cdot \frac{g^2}{4}\left(h^2 + L^2\right)}}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} \Rightarrow$$

$$t_1^2 = 117 \text{ с}^2 \Rightarrow t_1 = \pm\sqrt{116} = \pm 10{,}8 \text{ с},$$

$$t_2^2 = 14{,}3 \text{ с}^2 \Rightarrow t_2 = \pm\sqrt{14{,}3}\text{s} = \pm 3{,}77 \text{ с}.$$

Отрицательные значения не имеют физического смысла, а для положительных значений получаем два возможных угла α_1 и α_2:

$$\alpha_1 = \arccos\frac{L}{vt_1} = \arccos\frac{200}{56 \cdot 10{,}8} \approx 71^\circ;$$

$$\alpha_2 = \arccos\frac{L}{vt_2} = \arccos\frac{200}{56 \cdot 3{,}78} \approx 19^\circ.$$

Ответ: 71° и 19°.

4. Как назло, перед началом осенних каникул Лиза неудачно упала и вывихнула ногу. Ограниченная в перемещениях, она много времени провела, наблюдая из окна за магазином электротехники. Лиза смотрела, как люди входят и выходят, выпуская теплый воздух из помещения. На третий день наблюдений в магазине начали устанавливать дополнительную дверь, так что между ней и основной дверью образовалось небольшое пространство. Лиза предполагает, что таким образом хозяин магазина пытается экономить на обогреве помещения.

   Для того чтобы проверить свое предположение, Лиза подкараулила соседа Степана, который работает в этом магазине, и попросила посмотреть дневную и ночную мощность радиаторов в первый день наблюдений и последний, ибо количество посетителей в оба дня было одинаковым и температура воздуха на улице совпадала. Отличались эти дни лишь наличием новой конструкции.

   Вот такие данные удалось собрать:

   - Температура за окном в оба дня была постоянной $T_1 = 4^\circ$ С. Ночью магазин не работал, а температура составляла $T_2 = 0^\circ$ С.

- Степан сообщил, что в магазине установлены электрические радиаторы, которые поддерживают температуру на уровне $T_0 = 20^\circ$ С. Их настройки не меняли после строительства двери.
- Средняя мощность радиаторов в первый день наблюдений составляла ночью $P_2 =$ 5,0 кВт, днём — $P_1 = 4{,}6$ кВт, а вот после строительства дневная мощность составляла уже $P_3 = 3{,}8$ кВт.

Убедившись в верности своего предположения, Лиза, однако, поняла, что упустила одну деталь: людей. Покупатели и работники не только выпускали тепло, открывая двери, но ещё и согревали воздух своими телами и дыханием. Кроме того, в рабочие часы температуру в магазине поддерживает освещение. Помогите Лизе оценить мощность, произведённую людьми и освещением в магазине.
При этом Лизе, а значит и нам, придётся сделать много предположений:

- Воздух считать хорошо перемешанным, а именно: при открытии наружных дверей воздух, попадающий в помещение, будет иметь температуру наружного воздуха; аналогичное допущение считать верным для всех дверей.
- Количество воздуха, проходящего через дверной проём, считать не зависящим от разницы температур.
- Считать, что строительство двери не изменило потери тепла через стены магазина в сравнении с ситуацией до строительства.
- Скорость теплообмена считать пропорциональной разнице температур.

Решение.

Теплообмен между междверным пространством и улицей должен быть таким же, как и теплообмен между междверным пространством и магазином. Поэтому в течение дня в междверном пространстве будет сохраняться температура

$$T_4 = \frac{T_0 + T_1}{2} = 12^\circ \text{ C}.$$

Таким образом, потери тепла через дверь уменьшаются в два раза после строительства второй двери. Это уменьшение сопровождается уменьшением мощности на обогрев

$$\Delta P = P_1 - P_3 = 0{,}8 \text{ кВт}.$$

Таким образом, потери тепла через двери до строительства были равны

$$P_0 = 2\Delta P = 1{,}6 \text{ кВт}.$$

Днём разница температур с улицей составляет $\Delta T_1 = 16^\circ$ C, ночью — $\Delta T_2 = 20^\circ$ C. Значит, если бы магазин был закрыт в течение дня, радиаторы бы работали с мощностью

$$P_1' = P_2 \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 4{,}0 \text{ кВт}.$$

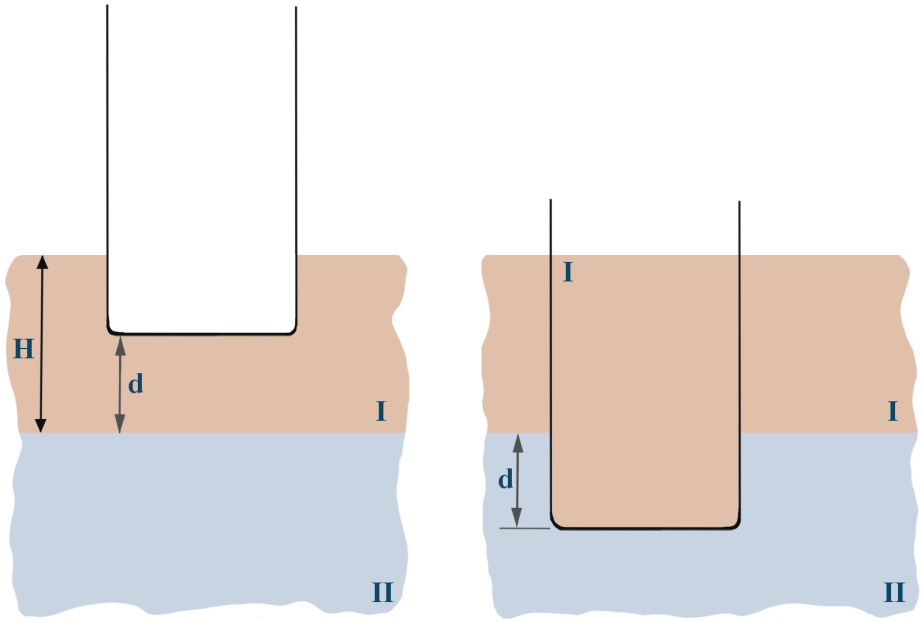
Из-за того что магазин открыт, люди и освещение привносят мощность P_x, а через дверь теряется мощность P_0. Получаем уравнение

$$P_1' = P_1 + P_x - P_0,$$

откуда находим $P_x = 1{,}0$ кВт.

Ответ: 1,0 кВт.

5. Прогуливаясь по улице одним осенним днём, Лиза наткнулась на гигантскую лужу. Её заинтересовали разноцветные переливы на поверхности воды. Быстро догадавшись, что этот эффект вызван бензином, разлившимся по поверхности лужи, Лиза решила поэкспериментировать.



Во-первых, она измерила толщину слоя бензина — она оказалась равна $H = 0{,}5$ см. Далее она запустила плавать по луже пустой цилиндрический стаканчик с поперечным сечением $S = 16$ см^2 и массой $m = 1{,}5$ г. Изначально дно стакана оказалось выше середины уровня бензина, однако затем Лиза налила в стаканчик бензина так, чтобы его уровень снаружи и внутри сравнялись. Лиза заметила, что в обоих случаях дно находилось на одном расстоянии от уровня воды — d. Помогите Лизе определить плотность бензина. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Решение.

Условие равновесия в случае, когда Лиза запустила плавать по луже пустой стаканчик $mg = F_A$, где сила Архимеда

$$F_A = \rho_1 g(H - d)S.$$

Отсюда

$$\frac{m}{S} = \rho_1(H - d). \tag{5}$$

В случае, когда Лиза долила в стаканчик бензин, давление на уровне дна составит $p = \rho_1 gH + \rho_0 gd$. Следовательно, условие равновесия примет вид

$$(m + \rho_1 S(H + d))g = pS = (\rho_1 gH + \rho_0 gd)S.$$

Таким образом, $\rho_1 = (d/H)\rho_0$. Подставив это в условие равновесия (5), придём к уравнению

$$\frac{m}{S} = \rho_0 \frac{d}{H}(H - d) \implies d^2 - Hd + \frac{mH}{S\rho_0} = 0.$$

Решив квадратное относительно d/H уравнение, получим два корня:

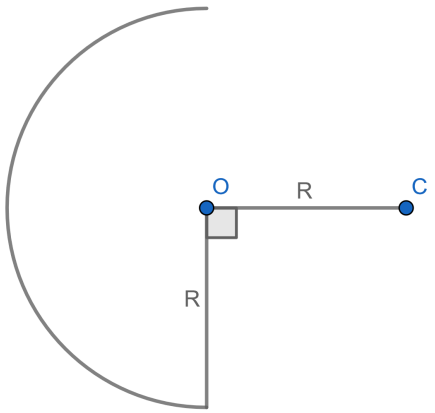
$$\frac{d}{H} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{SH\rho_0}}.$$

Учитывая, что по условию $d/H > 1/2$, остаётся только корень со знаком плюс. Тогда

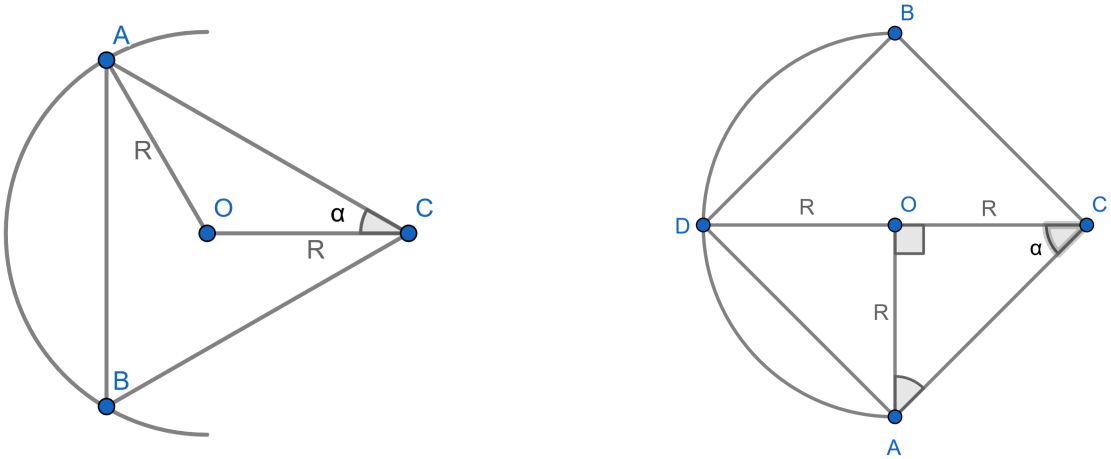
$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{SH\rho_0}}\right) = 0{,}75 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $\rho_1 = 0{,}75$ г/см^3.

6. На расстоянии R от центра кривизны O вогнутого полусферического зеркала радиуса R расположили точечный источник света C. Под каким углом α нужно пустить луч, чтобы он вернулся обратно к источнику?



Решение.



1 2

Рис. 6: Ход лучей в вогнутом полусферическом зеркале

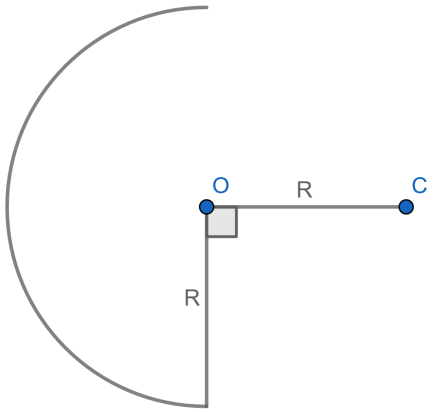
Во-первых, имеем тривиальный ответ $\alpha = 0$. Другие значения угла можно получить, увеличивая число отражений луча о зеркало. Рассмотрим случай двух отражений (рис. 6.1). Из чертежа видно, что, в силу равенства углов падения и отражения, точка O является одновременно центром описанной и вписанной окружностей для треугольника ABC – это возможно, только если треугольник равносторонний. Отсюда сразу получаем ответ $\alpha = \widehat{OCA} = \dfrac{\pi}{6}$.

Продолжая увеличивать угол α, заметим, что в крайнем случае, когда луч падает на кромку зеркала (рис. 6.2), происходит тройное отражение луча и его возврат к источнику. Луч в таком случае проходит квадрат и $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Так как в этом случае отражение происходило от кромки, других возможностей удовлетворить условию задачи нет.

Ответ: $\alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

3 Старшая первая лига

1. На расстоянии R от центра кривизны O вогнутого полусферического зеркала радиуса R расположили точечный источник света C. Под каким углом α нужно пустить луч, чтобы он вернулся обратно к источнику?

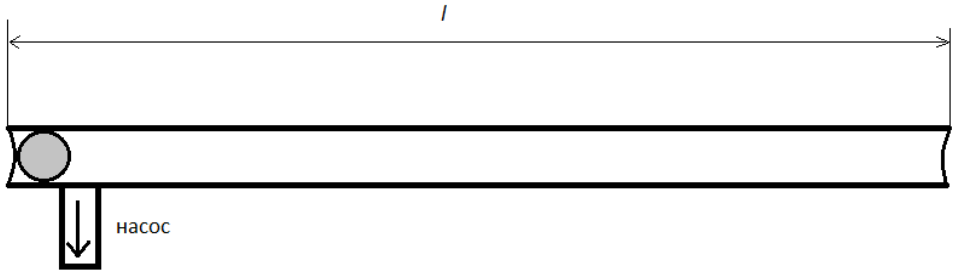


Решение.

Решение задачи приведено на странице 21.

Ответ: $\alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Как-то раз Теодор принес домой вакуумную пушку. Почуяв неладное и заметив грозный взгляд жены на себе, отец Теодора решил конфисковать пушку и провести испытания в гараже, дабы убедиться в её безопасности. Пушка представляет собой трубу, оба конца которой закрыты воздухонепроницаемой мембраной. Внутри трубы вплотную к одному из концов находится шарик, который выступает в качестве снаряда. Для того чтобы произвести выстрел, из пушки откачивается воздух, и затем разрывается ближайшая к шарику мембрана.
Диаметр шарика совпадает с диаметром трубы и равен $d = 4{,}0$ см, масса шарика $m = 24$ г, длина трубы $l = 154$ см, атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа. Помогите отцу Теодора решить, безопасно ли отдавать сыну в руки пушку: рассчитайте скорость, которую наберёт шарик в момент столкновения со второй мембраной. Трение не учитывать.



Решение.

Наш снаряд делит трубу на две камеры. Перед выстрелом давление в обеих камерах равно нулю. При разрыве мембраны с одной стороны давление на шарик становится равным атмосферному P_0, а на шарик начинает действовать сила, равная произведению площади сечения шарика на разницу давлений $\Delta P = P_0 - 0 = P_0$:

$$F = P_0 \pi d^2/4.$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение мяча $a = F/m$. Движение равномерно ускоренное,

$$L = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

где $L = l - d$ — пройденное шариком расстояние, v_0 и v — начальная и конечная скорости. Учитывая, что начальная скорость шарика равна нулю, выразим

$$v = \sqrt{2La} = \sqrt{\frac{2LP_0\pi d^2}{4m}} = d\sqrt{\frac{LP_0\pi}{2m}} = 130 \text{ м/с}.$$

Шарику ещё потребуется разорвать вторую мембрану, а значит, скорость на вылете будет немного ниже 130 м/с или 470 км/ч — а подобные скорости вряд ли могут считаться безопасными.

Ответ: 130 м/с.

3. Теодор и Лиза лето провели у бабушки с дедушкой в деревне. Одним из развлечений для них стала стрельба из лука. На доске Лиза нарисовала красной краской мишень и повесила её на дерево, а Теодор прочертил линию за 200 метров от дерева, обозначив стартовую позицию. К концу лета, хорошенько пристрелявшись, они устроили соревнования. Чтобы не проиграть сестре, Теодор решил всё рассчитать. Помогите ему победить

Лизу, определив угол α к горизонту, под которым нужно выстрелить, чтобы попасть ровно в центр мишени.

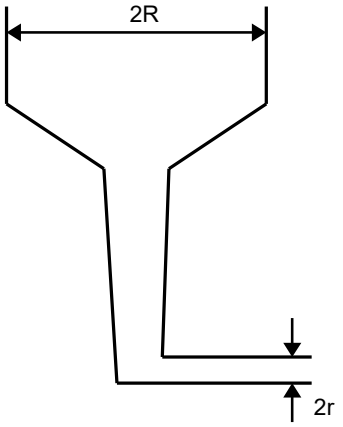
КПД лука $\eta = 0{,}17$, масса стрелы $m = 54$ г. Теодор выпускает стрелу на высоте своего плеча $h_{\text{Т}} = 160$ см, а центр мишени находится на высоте $h_{\text{ц}} = 90$ см. Работа Теодора при натяжении лука составляет $A = 500$ Дж. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Решение задачи приведено на странице 16.

Ответ: 71° и 19°.

4. Соня хочет, чтобы у неё на Новый год было много-много конфет. Она представила, что конфеты высыпаются из стены её комнаты через воронку, изображённую на рисунке, а она ловит их ртом. Конфеты являются гладкими вкусными шоколадными сферами радиуса $r = 7$ мм. Радиус верхней части воронки $R = 5$ см. Шоколадные конфеты добавляются в верхнюю часть воронки со средней скоростью 5 шоколадных конфет в секунду, а уровень шоколадных конфет в ней при этом остаётся постоянным.



При случайном расположении шоколадные конфеты занимают 0,64 упаковки. Как быстро шоколадные конфеты вылетают из воронки в рот Сони? Какова средняя скорость падения шоколадных конфет в верхней части воронки?

Решение.

Решение задачи приведено на странице 6.

Ответ: 0,07 м/с, $1{,}43 \cdot 10^{-3}$ м/с.

5. У Маргариты Леонидовны на огороде уродилось много смородины. В силу вредности делиться ягодой с внуками или соседями она не захотела, поэтому решила варить из смородины джем. У Маргариты Леонидовны есть цилиндрические стеклянные банки высотой $h = 7{,}0$ см и внутренним радиусом $r = 2{,}5$ см. Она взяла одну из банок, налила в неё горячий смородиновый джем температурой $t_0 = 80^\circ$ С, закрыла крышкой и поставила остывать. Банку она заполнила не доверху, а оставила немного воздуха между джемом и крышкой. Если к крышке прикладывается сила не менее $F = 4$ Н, слышен звук внезапного выгибания крышки, который очень пугает Эллу, болонку Маргариты Леонидовны. Через 30 минут после закрытия банки Элла услышала хлопок и заметалась по квартире. В этот момент Маргарита Леонидовна вспомнила про джем и решила его проверить. Мы знаем, что джем затвердевает при температуре $t_{\text{тв}} = 60^\circ$ С, — был ли он твёрдым, когда Маргарита Леонидовна пришла его проверять? Считайте атмосферное давление P_0 равным 10^5 Па.

Решение.

Решение задачи приведено на странице 4.

Ответ: Когда Маргарита Леонидовна проверила джем, он ещё не был твёрдым.

6. Тело массы m и с зарядом q влетает в однородное магнитное поле B со скоростью v_0 перпендикулярно направлению магнитной индукции. Считая, что энергия, потерянная телом за время t с момента влета в магнитное поле, определяется законом

$$P = \frac{2kq^2}{3c^3}a^2(t)t,$$

где a — ускорение, q — заряд, k — постоянная Кулона, c — скорость света в вакууме, определите зависимость скорости тела от времени, а также узнайте, за какое количество времени радиус траектории уменьшится в N раз относительно начального.

Решение.

Запишем второй закон Ньютона с силой Лоренца и закон сохранения энергии:

$$ma(t) = \frac{mv^2(t)}{R(t)} = Bqv(t), \tag{6}$$

$$\frac{mv^2(t)}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - P = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{2kq^2a^2(t)}{3c^3}t, \tag{7}$$

где $R(t)$ — радиус кривизны. Подставляя ускорение из закона Ньютона (6) в закон сохранения энергии (7), можно получить, что

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1+\alpha t}},$$

где

$$\alpha = \frac{4kq^4B^2}{3m^3c^3}.$$

Также несложно получить время, за которое радиус траектории уменьшится в N раз, так как из второго закона Ньютона $R(t) = \dfrac{mv(t)}{Bq}$ и, соответственно, $N = \dfrac{R(0)}{R(T)} = \dfrac{v_0}{v(T)}$.

$$T = \frac{N^2-1}{\alpha}.$$

Ответ: $v(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{1+\alpha t}}$, $T = \dfrac{N^2-1}{\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{4kq^4B^2}{3m^3c^3}$.

4 Младшая первая лига

1. У Лизы и Теодора есть любимый напиток, который они между собой называют вкусно–сок. Однажды, когда Теодор попросил Лизу поделиться своей порцией вкусно–сока, Лиза отлила брату половину напитка, а потом добавила ему в кружку столько же воды. Он захотел подогреть свою смесь, для этого Теодору нужно знать её удельную теплоёмкость. Помогите Теодору определить удельную теплоёмкость разбавленного таким образом вкусно-сока, если удельная теплоёмкость воды равна $c = 4200$ Дж/(°C·кг), а удельная теплоёмкость вкусно–сока — $c' = 3000$ Дж/(°C·кг).

   Решение.

   Из условия понятно, что массовая доля воды в напитке Теодора составляет 0,5. Тогда искомую удельную теплоёмкость можно найти по формуле:

$$c_0 = \frac{c + c'}{2} = \frac{4200 + 3000}{2} = 3600\ \frac{\text{Дж}}{°C \cdot \text{кг}}.$$

   Ответ: $3600\ \dfrac{\text{Дж}}{°C \cdot \text{кг}}$.

2. Однажды Лиза увидела в своём учебнике задачу про два заряда $+q$ и $-4q$, которые двигались навстречу друг к другу. Её заинтересовал следующий вопрос: если расположить эти два заряда на расстоянии l друг от друга, то какой заряд Q нужно добавить в систему и как его расположить, чтобы вся система из трёх зарядов находилась в равновесии?

   Решение.

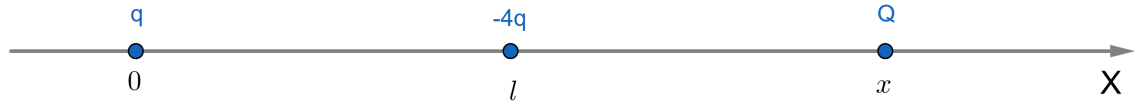


Рис. 7: Система координат для зарядов

   Поместим заряд Q в точку с координатой x (см. рис. 7). Тогда система из трёх зарядов будет находиться в равновесии, если силы Кулона, действующие на заряды, будут

скомпенсированы, то есть

$$\frac{kqQ}{x^2} = \frac{4kq^2}{l^2},$$
$$\frac{4kqQ}{(x-l)^2} = \frac{4kq^2}{l^2}.$$

Это система уравнений на x и Q, решая их, получаем два ответа: $x = -l$ и $Q = 4q$, а также $x = \frac{l}{3}$ и $Q = \frac{4}{9}q$. Второй корень мы отбрасываем, исходя из следующих физических соображений: вне зависимости от знака заряда Q, если он находится между двумя исходными зарядами, то равновесия достичь невозможно.

Ответ: Нужно поместить заряд $Q = -4q$ в точку с координатой $x = -l$.

3. Однажды Теодор решил сконструировать устройство для испытания нити на прочность. Для этого он взял невесомую и нерастяжимую нить, привязал к ней камень. Затем в нижней точке он придаёт камню некоторую горизонтальную скорость v. Какую минимальную силу натяжения должна выдерживать нить, чтобы камень мог вращаться на нити в вертикальной плоскости, если масса камня равна $m = 0{,}5$ кг?

Решение.

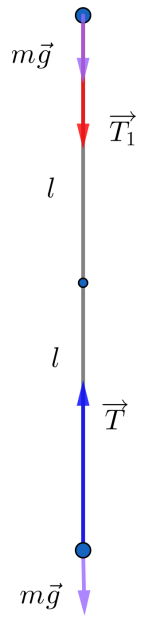


Рис. 8: Силы, действующие на камень

Сила натяжения нити будет достигать наибольшего значения в нижней точке траектории. В ней второй закон Ньютона записывается следующим образом:

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a), \tag{8}$$

где $a = \dfrac{v^2}{l}$ — центростремительное ускорение камня в нижней точке траектории, T — сила натяжения нити, v — скорость камня в нижней точке траектории. Запишем второй закон Ньютона в верхней точке траектории:

$$T_1 + mg = ma_1 = \frac{mu^2}{l},$$

здесь a_1 — центростремительное ускорение камня в верхней точке, l — длина нити, T_1 — сила натяжения нити в верхней точке. В предельном случае, когда начальной скорости v хватает шарику лишь на то, чтобы подняться до верхней точки траектории, в верхней точке траектории сила натяжения нити T_1 будет равна 0, тогда

$$\frac{mu^2}{l} = mg \Rightarrow u^2 = gl.$$

Запишем закон сохранения энергии для верхней и нижней точки траектории камня:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + 2mgl.$$

Подставим сюда полученное выражение для u^2:

$$v^2 = gl + 4gl = 5gl.$$

Подставим полученное выражение в (8):

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right) = 6mg = 30 \text{ Н}.$$

Ответ: $T = 30$ Н.

4. Однажды работнику Эльдорадо студенту Степану поручили задание определить фокусное расстояние неизвестной тонкой линзы. Степан, в попытках это сделать, заметил, что если поставить карандаш на расстоянии $l = 10$ см от линзы, то она даст действительное чёткое изображение карандаша той же высоты. Помогите Степану определить фокусное расстояние линзы.

Решение.

Так как изображение действительное, линза собирающая. Так как размер изображения такой же, как размер объекта, расстояние от линзы до изображения f равно расстоянию от линзы до объекта l. Тогда по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{l} = \frac{2}{l} \Rightarrow F = \frac{l}{2} = 5 \text{ см}.$$

Ответ: $F = 5$ см.

5. Давид заметил, что если он наливает в чайник $V = 1$ литр воды и ставит его на плиту, то вода закипает за $t = 10$ минут. Помогите Давиду посчитать сопротивление плиты, если известно, что она включена в сеть с напряжением $U = 380$ В. Теплоёмкость чайника равна $C = 1500$ Дж/($^\circ C$·кг). Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/($^\circ C$·кг). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Начальная температуры воды $T_0 = 20^\circ C$.

Решение.

Запишем закон Джоуля–Ленца

$$Q = \frac{U^2}{R}t$$

и уравнение теплового баланса:

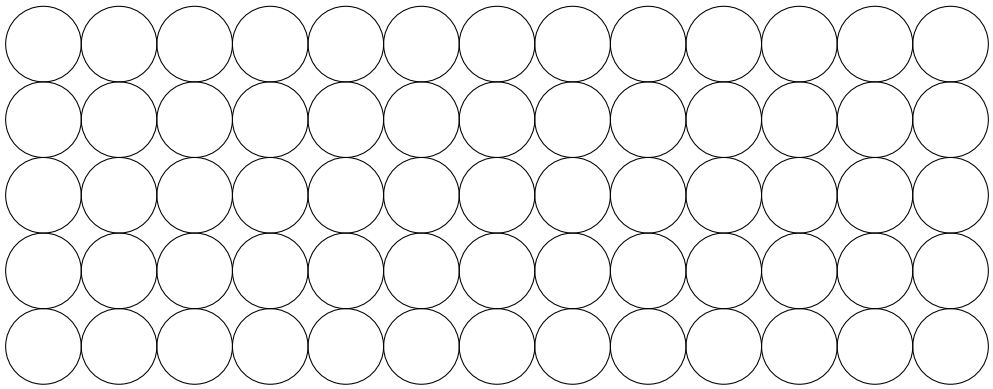
$$Q = C\Delta T + mc\Delta T,$$

где $\Delta T = 100^\circ\, C - T_0 = 80^\circ\, C$ — температура, на которую нагреваются чайник с водой, $m = \rho V$ — масса воды в чайнике. Приравнивая эти две формулы, получаем, что

$$\frac{U^2}{R}t = C\Delta T + \rho V c\Delta T \Rightarrow R = \frac{U^2 t}{(C + \rho V c)\Delta T} = 190 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 190$ Ом.

6. Кондитерская фабрика производит вкусные шоколадные конфеты сферической формы радиуса r. Упаковывают конфеты слоями, как показано на рисунке; каждый слой укладывается непосредственно поверх нижнего. При случайном расположении шоколадные



конфеты занимают 0,64 упаковки. Какую долю упаковки занимают шоколадные конфеты, выложенные слоями, как на рисунке?

Решение.

Можно представить, что сферические шоколадные конфеты расположены в виде сетки так, что каждая конфета помещена внутрь куба с ребром $2r$. Объём сферы

$$V_{\text{сф}} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

объём куба

$$V_{\text{куб}} = (2r)^3 = 8r^3.$$

Следовательно, доля упаковки, занятая конфетами,

$$n = \frac{V_{\text{сф}}}{V_{\text{куб}}} = \frac{4\pi r^2}{3 \cdot 8r^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52.$$

Ответ: 0,52.

10 декабря 2023 года

5 Старшая высшая лига. Финал

1. Как-то раз в зимние каникулы, устав от громкого телевизора соседки, отец семейства решил провести время со своими детьми, Теодором и Лизой, на природе. Найдя приятную полянку в лесу, они с сыном Теодором установили палатку. Теодор заметил, что палатка имеет форму полусферы радиуса $R = 4$ м, а коэффициент теплоотдачи стенок палатки, указанный в инструкции, равен $U = 3$ Вт/ (м$^2 \cdot$ К).

   В это время дочь Лиза занялась установкой газового обогревателя. Внимательно прочитав инструкцию, Лиза обнаружила, что при использовании газового обогревателя требуется хорошая вентиляция помещения. Помимо вредных веществ, при сжигании одной единицы массы газа выделяется $D = 2{,}25$ единиц массы воды. Удельная теплота сгорания газа $k = 40$ МДж/кг. Однако оказалась затёртой мощность обогревателя.

   После того как все работы были закончены, в палатке установилась температура $T_1 = 15^\circ$ С и влажность $\eta_1 = 80\%$; в то время как снаружи температура воздуха составляла $T_0 = -10^\circ$ С, а влажность $\eta_0 = 50\%$. Лиза и Теодор поделились своими наблюдениями друг с другом и решили вместе разгадать тайну затёртой мощности. Для этого они воспользовались следующими справочными данными:

   Плотность воздуха $\rho_в = 1{,}2$ кг/м^3, его теплоёмкость $c_в = 1{,}0$ кДж/ (кг $\cdot$ К). При температуре -10° С максимум $G_0 = 2{,}3$ г/м^3 водяного пара может поместиться в единицу объема воздуха, а при температуре 15° С — $G_1 = 12{,}8$ г/м^3 соответственно.

   Помогите Лизе и Теодору найти мощность газового обогревателя P и объём воздуха для вентиляции палатки Q в единицу времени. Считайте, что потерь тепла через пол палатки нет.

   Решение.

   В палатке устанавливается тепловое равновесие и равновесие воды в воздухе.

Опишем тепловое равновесие. Через стенки уходит

$$P_{\text{ст}} = SU\Delta T,$$

где $S = 2\pi R^2$, $\Delta T = T_1 - T_0$.
Потери тепла, связанные с вентиляцией,

$$P_{\text{вент}} = Q\rho_{\text{в}}c_{\text{в}}\Delta T.$$

Тогда тепловое равновесие будет иметь вид

$$P_{\text{нагр}} = P_{\text{ст}} + P_{\text{вент}} = SU\Delta T + Q\rho_{\text{в}}c_{\text{в}}\Delta T. \tag{9}$$

Также должно соблюдаться равновесие влаги в воздухе. Из палатки за счёт вентиляции выходит тёплый воздух с влажностью η_1, масса воды в воздухе, покидающем палатку за единицу времени, равна

$$\Gamma_{\text{вых}} = QG_1\eta_1,$$

в палатку заходит холодный воздух с влажностью η_0, привнося

$$\Gamma_{\text{вх}} = QG_0\eta_0.$$

Кроме того, при сжигании газа выделяется вода:

$$\Gamma_{\text{нагр}} = \frac{D \cdot P_{\text{нагр}}}{k}.$$

Равновесие будет иметь вид

$$\Gamma_{\text{нагр}} - \Gamma_{\text{вых}} + \Gamma_{\text{вх}} = 0,$$
$$\frac{D \cdot P_{\text{нагр}}}{k} - Q\left(G_1\eta_1 - G_0\eta_0\right) = 0. \tag{10}$$

Решая систему уравнений (9) и (10), обозначим $\gamma = G_1\eta_1 - G_0\eta_0$ и получим:

$$Q = \frac{SU\Delta T}{\gamma K/D - \rho_{\text{в}}c_{\text{в}}\Delta T} \approx 206 \text{ м}^3/\text{ч},$$
$$P_{\text{нагр}} = \frac{Q\gamma k}{D} \approx 9{,}26 \text{ кВт}.$$

Ответ: 9,26 кВт и 206 м^3/ч.

2. Известно, что тепловые потери в цепи постоянного тока можно найти по закону Джоуля–Ленца $Q = I^2Rt$. По какому закону можно найти тепловые потери в случае, когда сила тока зависит от времени по закону $I = i\sqrt{t}$?

Решение.

(a) **Вариант первый.** Запишем закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$dQ = I^2Rdt = i^2Rtdt\,.$$

Тогда, интегрируя обе части равенства, получаем зависимость количества теплоты от времени в следующем виде:

$$Q = i^2R\int tdt = \frac{i^2Rt^2}{2}\,.$$

Примечание: при интегрировании учитывается, что $Q(0) = 0$, поэтому в правой части нет произвольной постоянной.

(b) **Вариант второй.** Заметим, что квадрат силы тока зависит от времени линейно: $I^2 = i^2t$. Пусть $I^2_{\text{ср}} = \dfrac{i^2}{2}t$ — средний квадрат силы тока на интервале $[0, t]$, тогда тепловые потери за это время найдём с помощью закона Джоуля–Ленца: $Q = I^2_{\text{ср}}Rt = \dfrac{1}{2}i^2Rt^2$.

Ответ: $Q = \dfrac{i^2Rt^2}{2}$.

3. Важным аспектом при подаче мяча в бейсболе является его вращение. В безветренный день подающий на расстоянии l по прямой от принимающего кидает бейсбольный мяч под небольшим углом к горизонту $\alpha = 10°$ со скоростью $V = \sqrt{5gl}$ и закручивает его в плоскости, параллельной земле, с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\dfrac{8g}{l}}$. Определить, насколько отклонится мяч от прямолинейной траектории в зависимости от расстояния l. Считать, что торможения об воздух не происходит.

Указание: использовать формулу для эффекта Магнуса

$$\frac{F}{S} = C_A \frac{\rho_{\text{в}}}{2}(v_1^2 - v_2^2),$$

где v_1 и v_2 — скорости в противоположных точках мяча относительно воздуха, при этом они находятся на оси мяча, которая перпендикулярна траектории и находится в плоскости движения; F — сила, действующая на объект, направленная от точки с большей скоростью к точке с меньшей скоростью; S — площадь поперечного сечения мяча проходящего через центр, $\rho_{\text{в}}$ — плотность воздуха, C_A — безразмерный коэффициент связанный с формой и материалом мяча. Известно, что $\dfrac{3C_A\rho_{\text{в}}}{4\rho_0} = 0{,}07$, здесь ρ_0 — плотность мяча. Предполагать, что за всё время движения направление силы Магнуса не меняется.

Решение.

Из формулы эффекта Магнуса

$$\frac{F}{S} = C_A \frac{\rho_{\text{в}}}{2}(v_1^2 - v_2^2) = C_A \frac{\rho_{\text{в}}}{2}(4\omega r V),$$

здесь учтено, что $v_1 = V + \omega r$ и $v_2 = V - \omega r$. Заметим, что $S = \pi r^2$, то есть является площадью круга. Для определенности скажем, что $v_x = V\cos\alpha$, то есть ось OX выбрана вдоль прямой от принимающего к подающему. Тогда ясно, что $F = ma_y$, то есть сила Магнуса отклоняет мяч в сторону от принимающего параллельно земле. Таким образом, учитывая, что время полёта ограничено расстоянием до принимающего вдоль оси OX, а именно, $t = l/(V\cos\alpha)$, получим отклонение вдоль оси OY:

$$\Delta y = \frac{a_y t^2}{2} = C_A \rho_{\text{в}} \omega r V S \frac{l^2}{mV^2\cos^2\alpha} = \frac{3\pi C_A \rho_{\text{в}} \omega l^2 r^3}{4\pi r^3 \rho_0 V \cos^2\alpha} =$$
$$= \sqrt{\frac{8g}{l}} \frac{0{,}07 l^2}{\cos^2\alpha\sqrt{5gl}} = \frac{0{,}07\sqrt{8}l}{\sqrt{5}\cos^2\alpha} \approx 0{,}0913l.$$

Отклонение вдоль оси OZ можно получить по стандартной схеме для тела, летящего под углом к горизонту. А именно,

$$\Delta z = Vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gl^2}{2V^2\cos^2\alpha} = l\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{10\cos^2\alpha}\right) = l\frac{5\sin 2\alpha - 1}{10\cos^2\alpha} \approx 0{,}073l.$$

Тогда полное отклонение от прямой будет задано как

$$\Delta l = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta y^2} \approx l\sqrt{0{,}0053 + 0{,}0083} \approx 0{,}117l.$$

Ответ: $\Delta l = 0{,}117l$.

Примечание. В условии задачи предлагается использовать предположение о неизменности направления силы Магнуса. Определим, насколько это предположение влияет на точность ответа. Для этого решим задачу без данного предположения. Всюду в примечании жирным шрифтом обозначены векторные величины. Сила Магнуса

$$\mathbf{F}_M = 2C_A\rho_{\text{в}}Sr[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] = 2C_A\rho_{\text{в}}Sr\omega(-v_y, v_x, 0),$$

здесь $\boldsymbol{\omega} = (0{,}0{,}\omega)$, $\mathbf{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$. Тогда второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_M + m\mathbf{g} \implies \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = (-bv_y, bv_x, -g),\ b := \frac{2C_A\rho_{\text{в}}Sr\omega}{m}.$$

Это приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -b\dfrac{dy}{dt}, \ \ x(0) = 0, \ \ \dfrac{dx}{dt}(0) = V\cos\alpha; \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = b\dfrac{dx}{dt}, \ \ y(0) = 0, \ \ \dfrac{dy}{dt}(0) = 0; \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g, \ \ z(0) = 0, \ \ \dfrac{dz}{dt}(0) = V\sin\alpha. \end{cases}$$

Последнее уравнение как раз даёт уравнение на Δz в основном решении. Первое уравнение можно проинтегрировать и подставить во второе, тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -by + c_1, \ \ c_1 = V\cos\alpha, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -b^2y + bc_1. \end{aligned}$$

Уравнение на y можно решить, это фактически уравнение гармонического осциллятора с постоянной силой. То есть решение представимо в виде синусов и косинусов. Если учесть начальные условия, решение имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c_1}{b}\sin bt, \\ y(t) = \dfrac{c_1}{b}(1 - \cos bt), \\ z(t) = Vt\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Чтобы найти отклонение по оси OY, надо выразить время из выражения $l = x(t_0)$. Имеем

$$t_0 = \frac{1}{b}\arcsin\frac{lb}{c_1} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{0{,}14\sqrt{8}}{\cos\alpha\sqrt{5}} \approx \frac{0{,}181}{b},$$

где были использованы все данные из условия. Используем тот факт, что $\cos\arcsin d = \sqrt{1-d^2}$, тогда

$$y(t_0) = \frac{\cos\alpha\sqrt{5}}{0{,}14\sqrt{8}}l\left(1-\sqrt{1-\frac{b^2l^2}{c_1^2}}\right) \approx 0{,}0893l.$$

Для $z(t_0)$

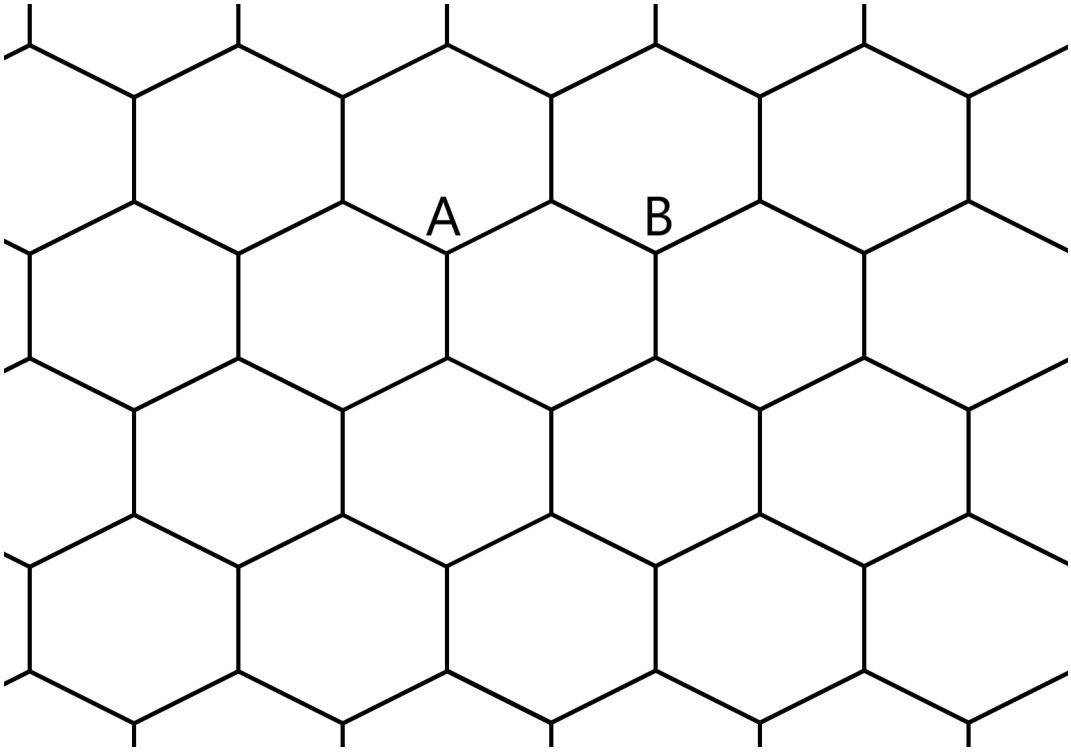
$$z(t_0) \approx \frac{0{,}181\sqrt{5}\sin\alpha}{0{,}14\sqrt{8}}l - \frac{0{,}181^2}{16\cdot 0{,}14^2}l \approx 0{,}073l.$$

Тогда полное отклонение от прямой будет задано как

$$\Delta l = \sqrt{z(t_0)^2 + y(t_0)^2} \approx l\sqrt{0{,}00533 + 0{,}00797} \approx 0{,}115l.$$

Видно, что отличие только в тысячных долях.

4. Определите эквивалентное сопротивление между точками A и B для бесконечно большой гексагональной цепи, показанной на рисунке, если сопротивление между любыми двумя соседними точками равно R.



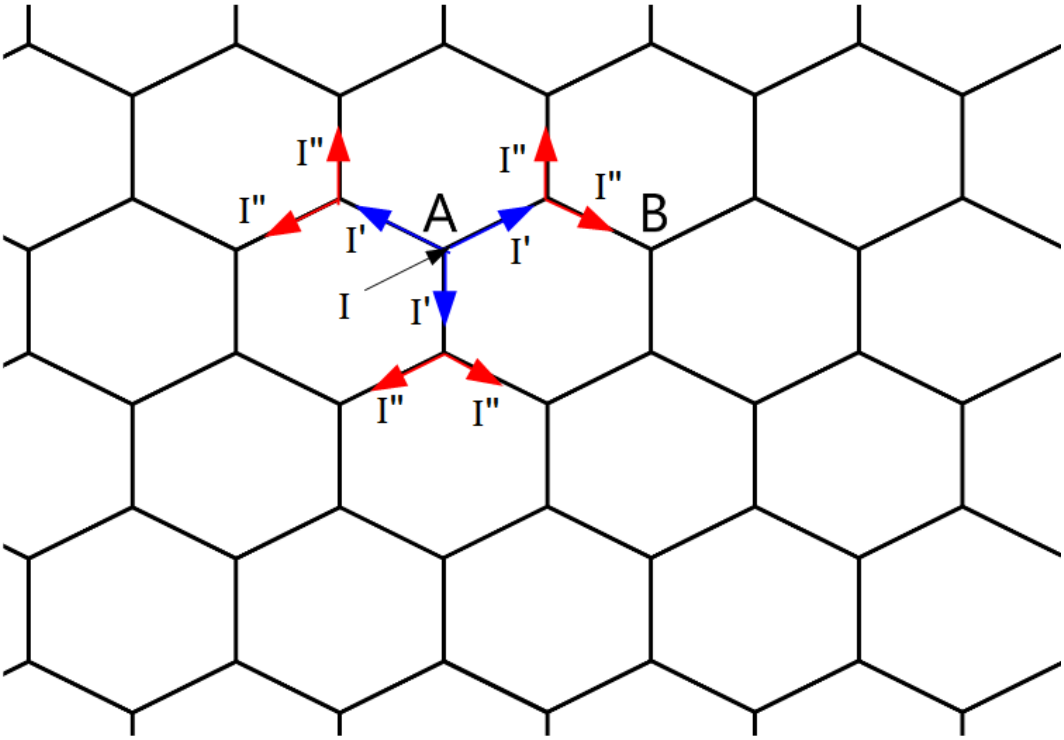
Решение.

Чтобы найти эквивалентное сопротивление бесконечной шестиугольной цепи, мы введём источник пробного тока I, подключённый между точкой A и землёй, которая расположена на бесконечности цепи, как показано на рисунке ниже.

В силу симметрии этот ток делится на три равные части, что даёт следующий результат:

$$I' = \frac{1}{3}I,$$

где I' — соответствующий ток, вытекающий из точки A в трёх разных направлениях, как показано на рисунке ниже.



Далее, также в силу симметрии, которую можно видеть на рисунке сверху, каждый ток I' делится ещё на две равные части, что даёт

$$I'' = \frac{1}{2}I' = \frac{1}{6}I,$$

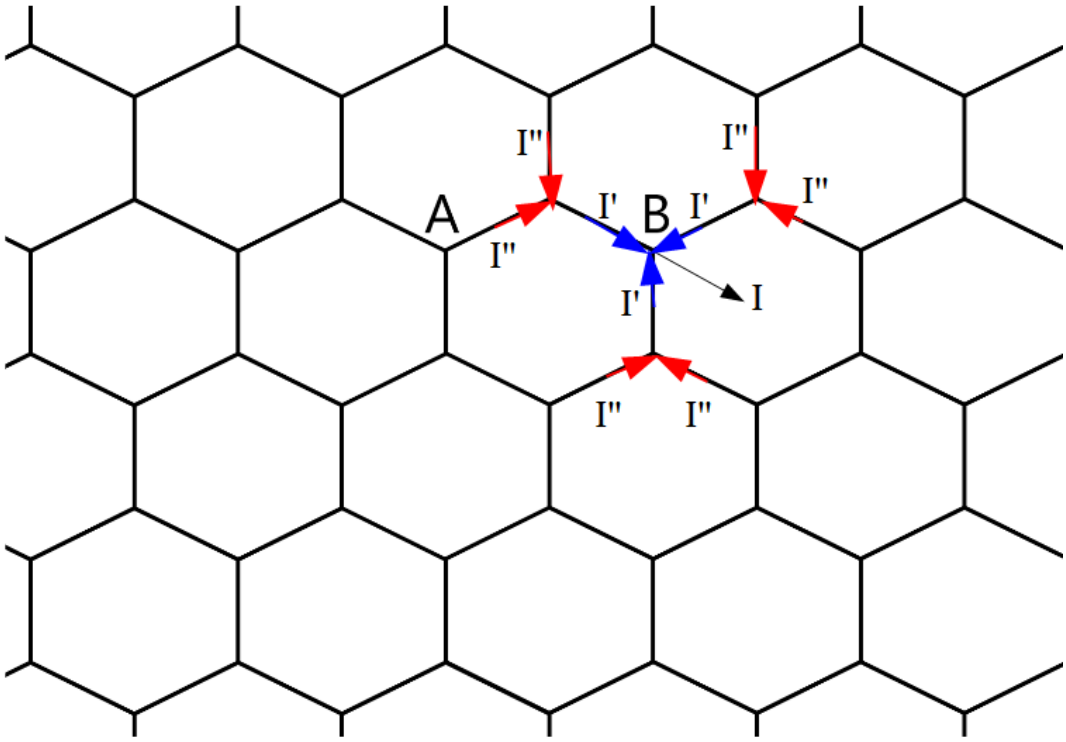
где I'' — соответствующий ток, также втекающий в точку B.

Следовательно, разность потенциалов между точками A и B в этом случае —

$$U'_{AB} = RI' + RI'' = \frac{1}{3}RI + \frac{1}{6}RI = \frac{1}{2}RI.$$

Согласно принципу суперпозиции, чтобы получить общую разность потенциалов между точками A и B, необходимо также ввести симметрично источник пробного тока, который течёт из точки B в сторону точки, расположенной в бесконечности цепи, как показано на рисунке ниже. Разделение токов в этом случае аналогично показанному ранее и представлено на рисунке ниже. Как и в предыдущем случае, разность потенциалов между точками A и B в этом случае определяется выражением:

$$U''_{AB} = RI' + RI'' = \frac{1}{3}RI + \frac{1}{6}RI = \frac{1}{2}RI.$$



Полная разность потенциалов тогда по принципу суперпозиции:

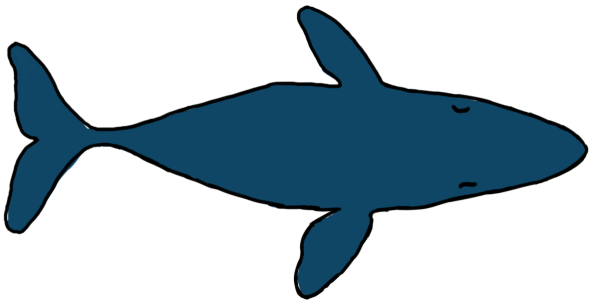
$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} = RI.$$

Следовательно,

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = R.$$

Ответ: R.

5. Некоторые животные, например киты, ориентируются с помощью эхолокации. Предположим, что кит издал звуковой сигнал через гортань, расположенную точно между ушами. Расстояние между ушами кита равно a. Предположим, подводная лодка движется на той же глубине, что и кит. Звук отражается от подводной лодки и достигает ближайшего уха кита в момент времени t с момента передачи. Если временная задержка между звуком, улавливаемым правым и левым ухом, равна Δt, на каком расстоянии находится подводная лодка и в каком направлении она движется? Скорость звука считать известной.



Решение.

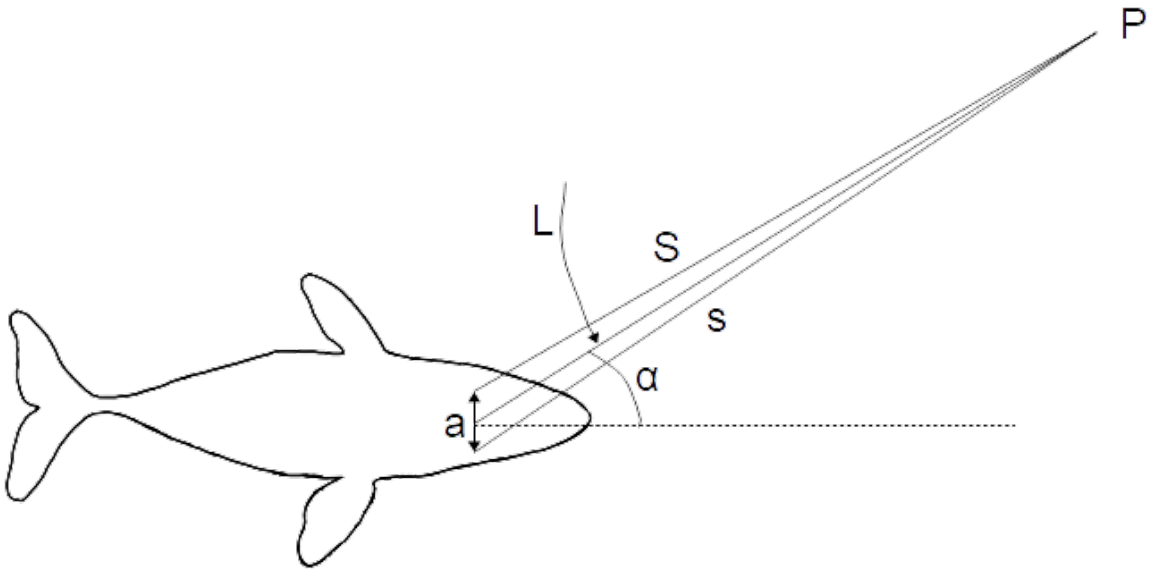


Рис. 9: Кит и подводная лодка (P)

Сначала давайте рассмотрим ситуацию на рисунке. Так как подводная лодка движется на той же глубине, что и кит, мы можем рассматривать двумерную ситуацию. Расстояние между ушами обозначим a, расстояние от подводной лодки до ближайшего к ней уха — s. L — расстояние от подводной лодки до гортани кита. Далее определим острый угол α между осью кита (обозначена на рисунке пунктиром) и прямой, соединяющей гортань кита и подводную лодку.

Пусть скорость звука в воде v, тогда

$$L + s = vt.$$

Для разницы расстояний, проходимых звуком до левого и правого уха, Δ:

$$\Delta = v\Delta t, \;\; S = s + \Delta.$$

Согласно неравенству треугольника,

$$v\Delta t \leq a.$$

Теперь мы можем записать теорему косинусов для треугольника гортань – ближнее ухо — подводная лодка:

$$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + L^2 - 2\frac{a}{2}L\cos(90^\circ - \alpha),$$

или

$$s^2 = \frac{a^2}{4} + L^2 - al\sin\alpha.$$

Теорему косинусов можно записать и для второго треугольника: гортань – дальнее ухо — подводная лодка.

$$S^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + L^2 - 2\frac{a}{2}L\cos(90^\circ + \alpha),$$

или

$$s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 = \frac{a^2}{4} + L^2 + aL\sin\alpha.$$

Суммируя эти два уравнения, получаем

$$2s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 = 2\frac{a^2}{4} + 2L^2.$$

Подставим Δ и s:

$$2v^2t^2 + 2L^2 - 4vtL + 2(vt - L)v\Delta t + v^2(\Delta t)^2 = \frac{a^2}{2} + 2L^2.$$

Тогда

$$L = \frac{v^2t^2 - a^2/4 + vtv\Delta t + v^2(\Delta t)^2/2}{2vt + v\Delta t};$$
$$L = \frac{vt}{2}\frac{1 - \dfrac{a^2}{4v^2t^2} + \dfrac{\Delta t}{t} + \dfrac{\Delta t^2}{2t^2}}{1 + \dfrac{\Delta t}{2t}}.$$

Обратно, вычитая две теоремы косинусов, мы получаем уравнение

$$2aL\sin\alpha = 2s\Delta + \Delta^2 = 2(vt - L)v\Delta t + v^2\Delta t^2,$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{2(vt - L)v\Delta t + v^2\Delta t^2}{2aL} = \frac{v\Delta t}{a}\frac{vt - L + v\Delta t/2}{L} = \frac{v\Delta t}{a}\left(\frac{vt}{l}\left(1 + \frac{\Delta t}{2t}\right) - 1\right).$$

Подставим L и получим, что

$$\sin\alpha = \frac{v\Delta t}{a}\frac{1 + \dfrac{a^2}{4v^2t^2} + \dfrac{\Delta t}{t}}{1 - \dfrac{a^2}{4v^2t^2} + \dfrac{\Delta t}{t} + \dfrac{\Delta t^2}{2t^2}}.$$

Примечание:

Интересно исследовать предельный случай, когда

$$\frac{a}{vt} = \frac{a}{s + L} \ll 1,$$

то есть, когда расстояние до подводной лодки значительно больше расстояния между ушами кита, как разумно предположить. По неравенству треугольника

$$\frac{\Delta t}{t} \leq \frac{a}{vt},$$

то есть

$$\frac{\Delta t}{t} \ll 1.$$

В таком приближении выражения для L и $\sin\alpha$ примут довольно простой вид:

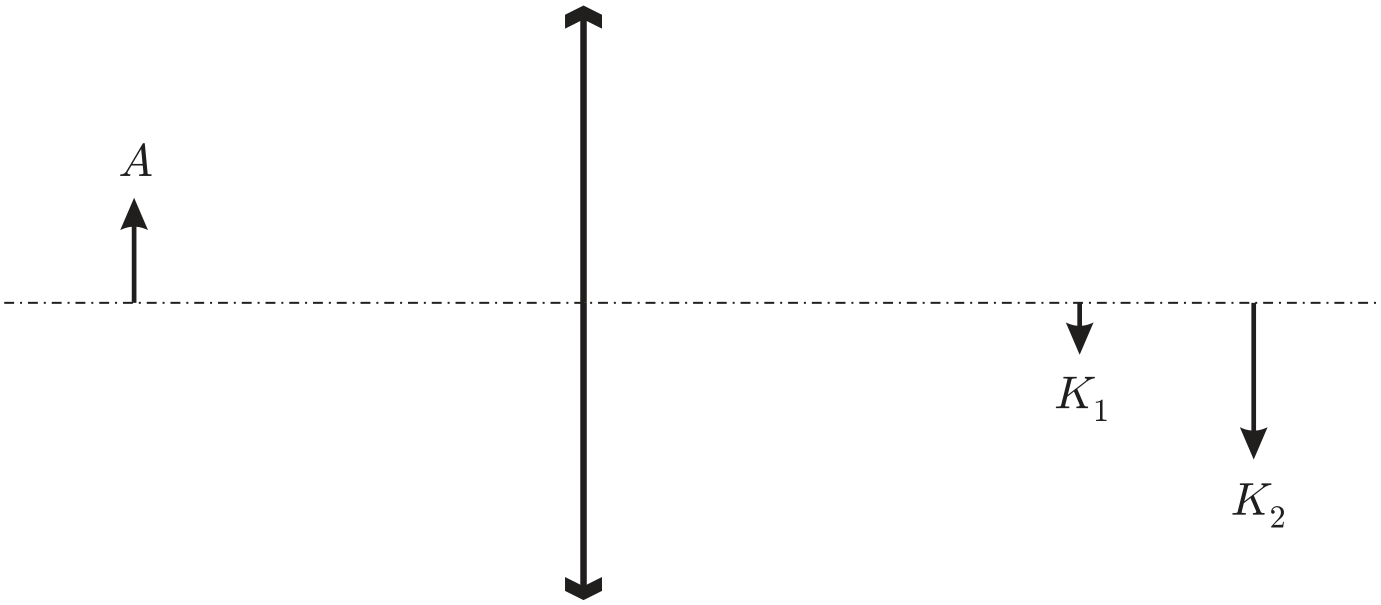
$$L \approx s = \frac{vt}{2};$$
$$\sin\alpha \approx \frac{v\Delta t}{a}.$$

Ответ:

$$L = \frac{vt}{2}\frac{1 - \dfrac{a^2}{4v^2t^2} + \dfrac{\Delta t}{t} + \dfrac{\Delta t^2}{2t^2}}{1 + \dfrac{\Delta t}{2t}};$$

$$\sin\alpha = \frac{v\Delta t}{a}\frac{1 + \dfrac{a^2}{4v^2t^2} + \dfrac{\Delta t}{t}}{1 - \dfrac{a^2}{4v^2t^2} + \dfrac{\Delta t}{t} + \dfrac{\Delta t^2}{2t^2}}.$$

6. Оптическая система состоит из выпуклой линзы и выпуклого зеркала, главные оптические оси которых совпадают. На рисунке изображён объект A и два изображения K_1 и K_2. Постройте центр кривизны выпуклого зеркала O и изображение объекта в зеркале A'. Предполагаем, что углы в оптической системе достаточно малы, чтобы не возникало сферических аберраций.



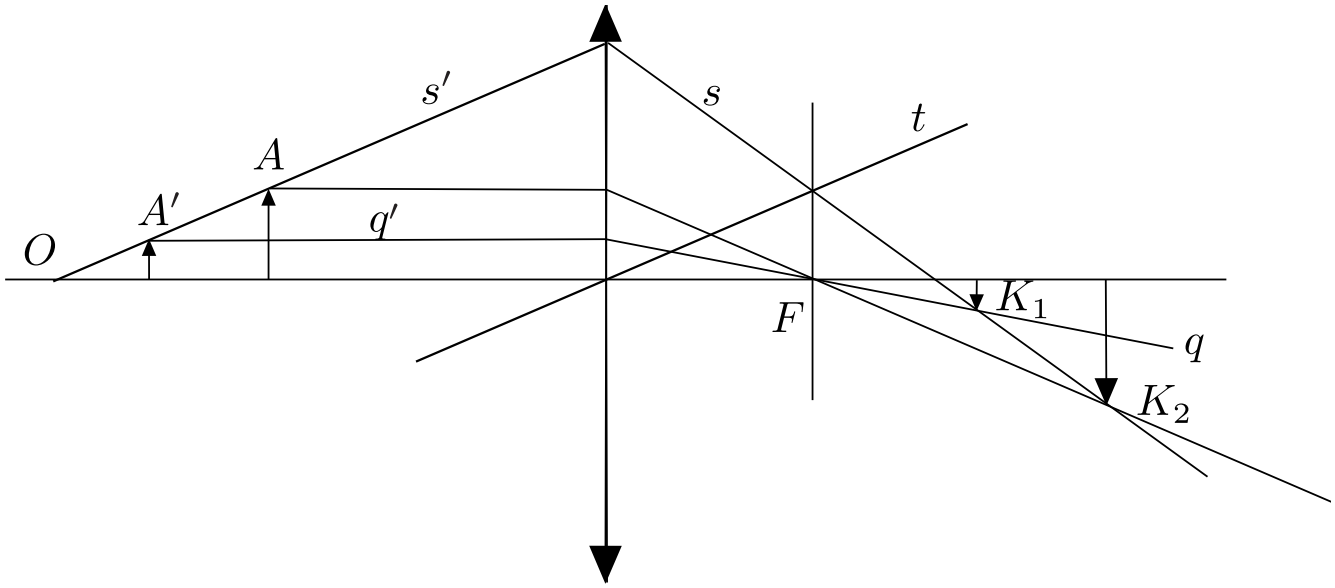


Рис. 10: Построение местоположения центра кривизны выпуклого зеркала и изображения объекта в выпуклом зеркале

Решение.

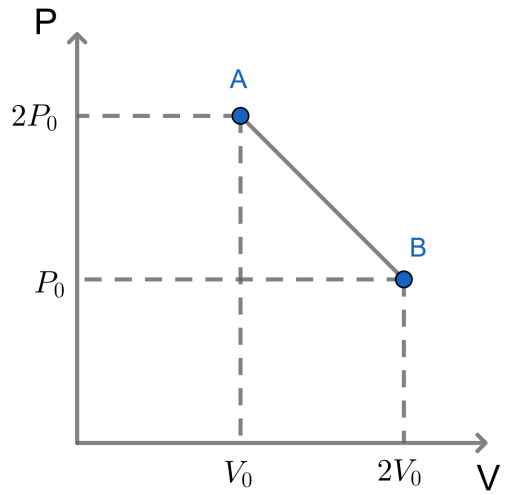
Заметим, что объект A, изображение A' и центр кривизны зеркала O должны лежать на одной прямой. Луч AA' при прохождении через линзу должен пройти через изображения A' и A в линзе – K_1 и K_2. Восстановив ход лучей s и s' (см. рис. 10), получим центр кривизны зеркала O как пересечение s' с оптической осью.

Чтобы найти точку A', найдем фокальную плоскость F. Для этого построим луч t параллельный s' и проходящий через центр линзы. Пересечение s и t даст нам точку, лежащую в фокальной плоскости. Точку A' мы находим как точку пересечения прямой s' с линией q', которая после преломления проходит через фокус и точку K_1 (поскольку K_1 является изображением A').

Ответ изображён на рисунке.

6 Старшая высшая лига. Бой за 3 место

1. Известно, что n моль идеального газа участвуют в процессе AB, указанном на рисунке. Найдите максимальную температуру, которую достигает газ в этом процессе.



Решение.

Первым делом составим уравнение термодинамического процесса в координатах PV. Очевидно, что графиком является прямая с уравнением

$$P = 3P_0 - \frac{P_0}{V_0}V.$$

С другой стороны, по закону Менделеева–Клапейрона

$$PV = nRT = 3P_0V - \frac{P_0}{V_0}V^2\,.$$

Правая часть этой зависимости — парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $V^* = \frac{3}{2}V_0$. Так как этот объём достигается в процессе, максимальная температура имеет значение

$$T^* = \frac{1}{nR}\left(\frac{9}{2}P_0V_0 - \frac{9}{4}P_0V_0\right) = \frac{9}{4nR}P_0V_0.$$

Ответ: $T^* = \frac{9}{4nR}P_0V_0$.

2. Как-то в ветреную погоду Лиза напросилась пойти с дедом на метеостанцию, где тот каждый день снимает показания приборов. Для того чтобы измерить скорость ветра, там используется ультразвуковой анемометр. Дед показал Лизе, как устроен прибор: в его центре $O = (0; 0)$ расположен источник звука, а в трёх точках с координатами $A = (0; a)$, $B = (a; 0)$ и $C = (-a; 0)$, где $a = 211{,}1$ мм, расположены датчики. Анемометр располагают так, чтобы все датчики и источник звука лежали в одной горизонтальной плоскости, и измеряют время, за которое звук от источника дойдёт до каждого из датчиков. У Лизы получились следующие значения: $t_A = 627{,}0$ мкс, $t_B = 625{,}2$ мкс и $t_C = 603{,}4$ мкс. Какова была скорость ветра в тот день? Считать размеры датчиков и источника пренебрежимо малыми.

Решение.

Перейдём в систему отсчёта ветра. Смещение датчика A в данной системе отсчёта $s_{Ay} = u_y t_A, s_{Ax} = u_x t_A$, где u_y, u_x — компоненты скорости ветра, аналогично можно расписать смещения двух других датчиков. Здесь мы заметим, что так как разница между временами достижения звуком датчиков мала, то скорость звука значительно превосходит скорость ветра. Исходя из этого, сделаем упрощение для смещений датчиков:

$$s_{Ay} = u_y \frac{a}{v_{\text{зв}}}, s_{Ax} = 0;$$
$$s_{By} = 0, s_{Bx} = u_x \frac{a}{v_{\text{зв}}};$$
$$s_{Cy} = 0, s_{Cx} = -u_x \frac{a}{v_{\text{зв}}}.$$

Выражения для времён достижения звуком датчиков примут следующий вид:

$$t_A = \frac{1}{v_{\text{зв}}}\left(a + u_y \frac{a}{v_{\text{зв}}}\right);$$
$$t_B = \frac{1}{v_{\text{зв}}}\left(a + u_x \frac{a}{v_{\text{зв}}}\right);$$
$$t_C = \frac{1}{v_{\text{зв}}}\left(a - u_x \frac{a}{v_{\text{зв}}}\right);$$

откуда можно выразить

$$\frac{a}{v_{\text{зв}}} = \frac{1}{2}(t_B + t_C),$$

подставляя, получим:

$$u_x = \frac{v_{\text{зв}}^2}{a}\left[t_B - \frac{1}{2}(t_B + t_C)\right] = v_{\text{зв}} \frac{t_B - t_C}{t_B + t_C} = 2a \frac{t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 6{,}1 \text{ м/с}$$

и

$$u_y = \frac{v_{\text{зв}}^2}{a}\left[t_A - \frac{1}{2}(t_B + t_C)\right] = 2a\frac{2t_A - t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 7{,}1 \text{ м/с}.$$

Скорость ветра

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \approx 9{,}4 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\approx 9{,}4$ м/с.

3. Важным аспектом подачи мяча в бейсболе является его вращение. В безветренный день подающий на расстоянии l от принимающего кидает мяч массы m радиуса r со скоростью V и закручивает его в плоскости, параллельной земле, со скоростью ω. Определить, насколько по горизонтали отклонится мяч от прямолинейной траектории. Считать, что торможения об воздух не происходит.

Указание: использовать формулу для эффекта Магнуса

$$\frac{F}{S} = C_A\frac{\rho_{\text{в}}}{2}(v_1^2 - v_2^2),$$

где v_1 и v_2 — скорости в противоположных точках мяча относительно воздуха, при этом они находятся на оси мяча, которая перпендикулярна траектории, и находится в плоскости движения; F — сила действующая на объект, направленная от точки с большей скоростью, к точке с меньшей скоростью; S — площадь поперечного сечения мяча проходящего через центр, $\rho_{\text{в}}$ — плотность воздуха, C_A — безразмерный коэффициент, связанный с формой и материалом мяча. Предполагать, что за всё время движения направление силы Магнуса не меняется.

Решение.

Из формулы эффекта Магнуса

$$\frac{F}{S} = C_A\frac{\rho_{\text{в}}}{2}(v_1^2 - v_2^2) = C_A\frac{\rho_{\text{в}}}{2}(4\omega r V).$$

В формуле эффекта Магнуса уже учтено, что $v_1 = V + \omega r$ и $v_2 = V - \omega r$. Заметим, что $S = \pi r^2$, то есть является площадью круга.

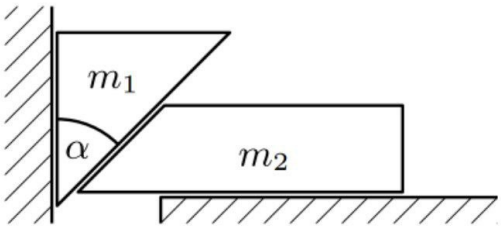
Для определённости скажем, что $V = v_x$, то есть ось OX выбрана вдоль изначального направления движения. Тогда ясно, что $F = ma_y$, то есть сила Магнуса отклоняет мяч

в сторону от принимающего параллельно земле. Таким образом, учитывая, что время полёта ограничено расстоянием до принимающего вдоль оси OX, а именно, $t = l/V$, получим искомое отклонение:

$$\Delta y = \frac{a_y t^2}{2} = C_A \rho_{\text{в}} \omega r V S \frac{l^2}{mV^2} = \frac{\pi C_A \rho_{\text{в}} \omega l^2 r^3}{mV}.$$

Ответ: $\Delta y = \dfrac{\pi C_A \rho_{\text{в}} \omega l^2 r^3}{mV}$.

4. Имеются два клина массами m_1 и m_2, угол раствора одного из них — α (см. рисунок). Рассчитайте ускорение левого клина в случае, когда коэффициент трения как между клиньями, так и между клиньями и стенками, равен μ.



Решение.

Левый клин может двигаться только вертикально, а правый клин — только горизонтально. Обозначим ускорение левого клина через a_1, а ускорение правого клина — через a_2.

На левый клин действует сила тяжести, направленная вертикально вниз, а в обратном направлении — составляющая $N \sin\alpha$ силы реакции N, действующей между нашими клиньями и перпендикулярной их поверхности соприкосновения. Левый клин действует на правый клин с силой N, перпендикулярной поверхности их соприкосновения. Трение о правый клин вызывает силу трения μN, которая направлена вверх в направлении границы соприкосновения клиньев и имеет вертикальную составляющую $\mu N \cos\alpha$. Полная сила, действующая со стороны левого клина на вертикальную стенку, равна сумме силы $\mu N \cos\alpha$ и горизонтальной составляющей силы трения — $\mu N \sin\alpha$. Затем мы вычисляем силу трения между левым клином и вертикальной стенкой как

$$F_{\text{тр-верт}} = \mu(N\cos\alpha - \mu N \sin\alpha).$$

В целом, из второго закона Ньютона получаем

$$m_1 g - N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha - \mu(N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha) = m_1 a_1. \tag{11}$$

На правый клин действует сила N и сила трения μN. Их горизонтальные составляющие равны $N\cos\alpha$ и $-\mu N\sin\alpha$. Далее нужно найти величину равнодействующей нормальной силы, действующей на стенку, для определения силы трения между стенкой и правым клином. Эта нормальная сила состоит из вертикальной составляющей $N\sin\alpha$ силы N, вертикальной составляющей $\mu N\cos\alpha$ силы трения между двумя клиньями и силы тяжести $m_2 g$. Тогда сила трения о горизонтальную стену равна

$$F_{\text{тр-гор}} = \mu(N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha + m_2 g).$$

Установим связь между сдвигами клиньев друг относительно друга. Представим, что левый клин сдвинулся вертикально вниз на расстояние s_1. Так как клинья должны оставаться смежными, правый клин переместится вправо на расстояние $s_2 = s_1 tg\alpha$. Аналогичное соотношение будет выполняться и для ускорений:

$$a_2 = a_1 tg\alpha.$$

Значит, второй закон Ньютона для движения правого клина в горизонтальном направлении примет вид

$$m_1 g - N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha - \mu(N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha) = m_1 a_1. \tag{12}$$

Преобразуем выражения второго закона Ньютона для левого (11) и правого клина (12):

$$m_1 g - N(\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha - \mu^2\sin\alpha) = m_1 a_1;$$
$$-\mu m_2 g + N(\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha - \mu^2\cos\alpha) = m_2 a_1 tg\alpha.$$

Отсюда получим:

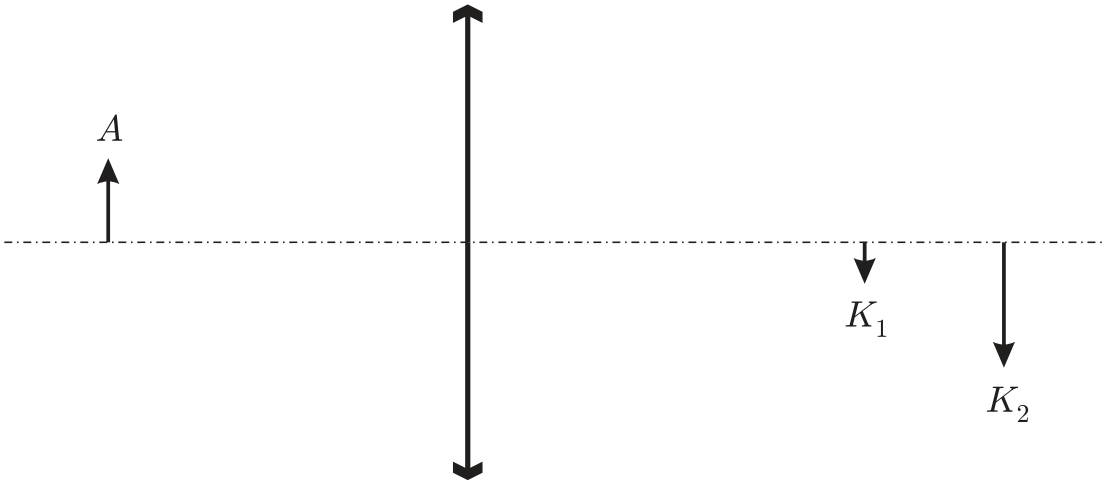
$$m_1 g(\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha - \mu^2\cos\alpha) - \mu m_2 g(\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha - \mu^2\sin\alpha) =$$
$$= a_1\left(m_1(\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha - \mu^2\cos\alpha) + m_2 tg\alpha(\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha - \mu^2\sin\alpha)\right).$$

Теперь мы можем найти ускорение:

$$a_1 = g\frac{1-\mu^2 - 2\mu tg\alpha - (m_2/m_1)\mu(2\mu + (1-\mu^2)tg\alpha)}{1-\mu^2 - 2\mu tg\alpha + (m_2/m_1)tg\alpha(2\mu + (1-\mu^2)tg\alpha)}.$$

Ответ: $a_1 = g\dfrac{1-\mu^2 - 2\mu tg\alpha - (m_2/m_1)\mu(2\mu + (1-\mu^2)tg\alpha)}{1-\mu^2 - 2\mu tg\alpha + (m_2/m_1)tg\alpha(2\mu + (1-\mu^2)tg\alpha)}$.

5. Оптическая система состоит из выпуклой линзы и выпуклого зеркала, главные оптические оси которых совпадают. На рисунке изображён объект A и два изображения K_1 и K_2. Постройте центр кривизны выпуклого зеркала O и изображение объекта в зеркале A'. Предполагаем, что углы в оптической системе достаточно малы, чтобы не возникало сферических аберраций.

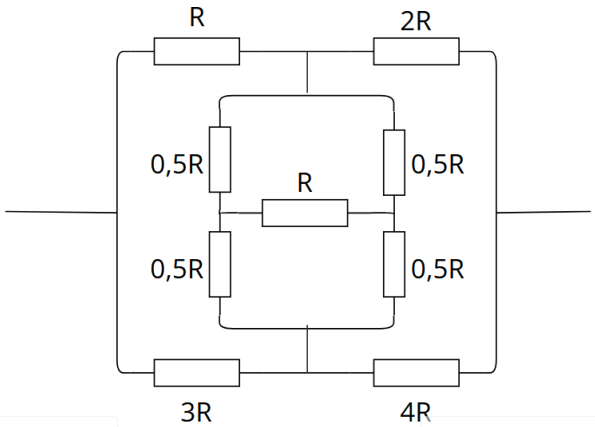


Решение.

Решение задачи приведено на странице 45.

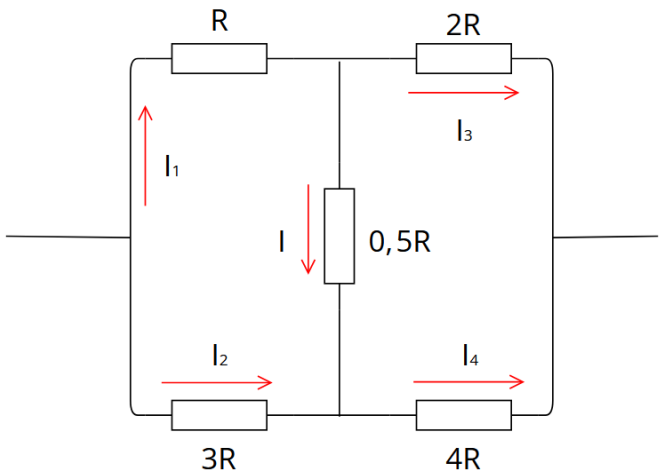
Ответ изображён на рисунке 10.

6. Найдите сопротивление цепи, представленной на рисунке ниже.



Решение.

В центре цепи находится мостик Уинстона, значит, через центральный резистор R ток не течёт и исходная цепь эквивалентна следующей:



По первому и второму законам Кирхгофа имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_0, \\ I_3 = I_1 - I, \\ I_4 = I + I_2, \\ I_1 + \dfrac{1}{2}I - 3I_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}I + 4I_4 - 2I_3 = 0, \end{cases}$$

где I_0 — суммарный ток, текущий в цепи. Решая эту систему, можем найти токи I_1 и I_3:

$$I_1 = \frac{43}{58}I_0,$$
$$I_3 = \frac{41}{58}I_0.$$

Зная токи, мы можем получить выражение для разности потенциалов между левой и правой точками цепи:

$$U = I_1R + 2I_3R = \frac{125}{58}I_0R \Rightarrow$$
$$R^* = \frac{U}{I_0} = \frac{125}{58}R,$$

где R^* — искомое сопротивление.

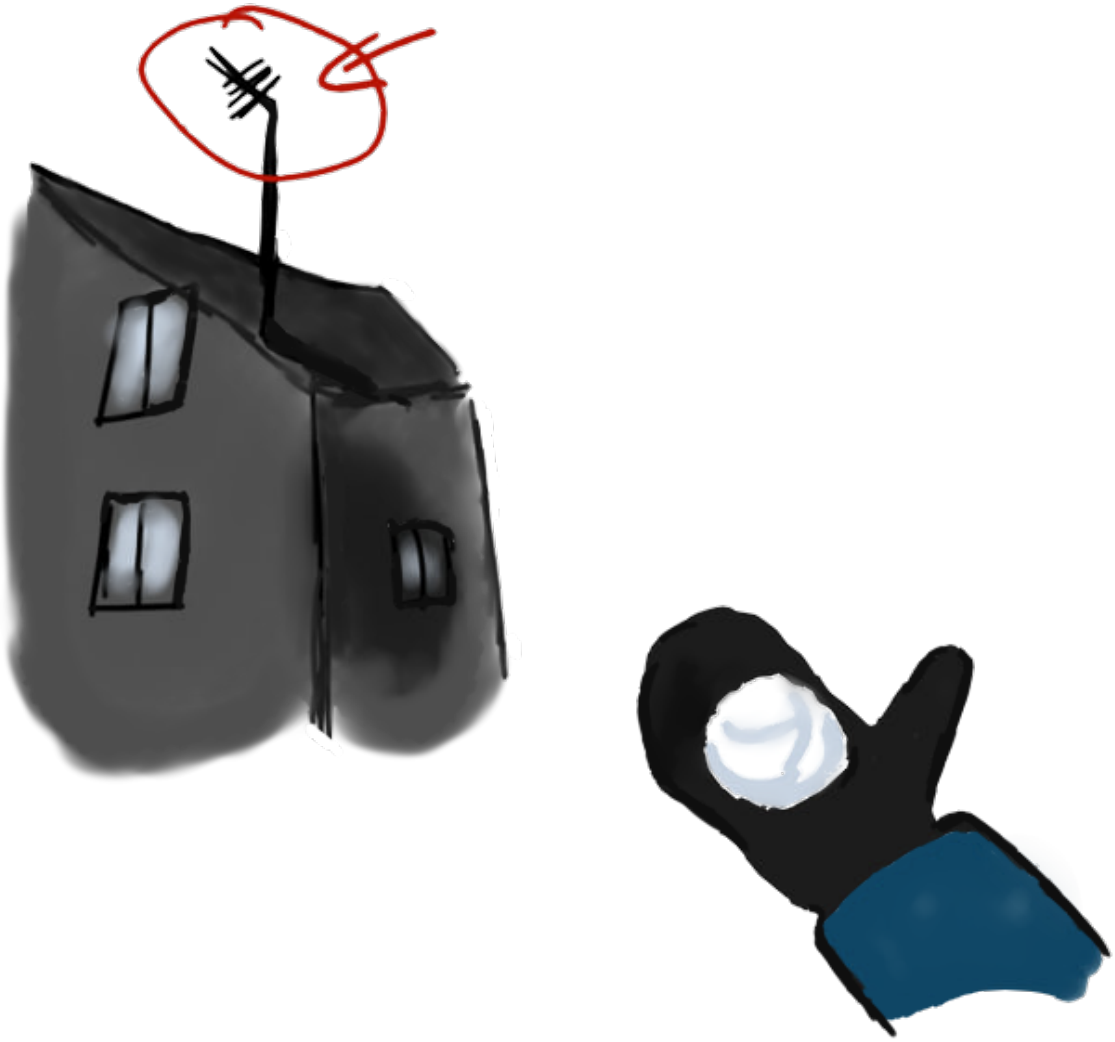
Примечание: Заметим, что ответ не зависит от выбора траектории между левой и правой точками, то есть

$$U = I_1R + 2I_3R = I_1R + 0{,}75IR + 4I_4R = 3I_2R + 4I_4R.$$

Ответ: $R^* = \dfrac{125}{58}R.$

7 Младшая высшая лига. Финал

1. Теодора раздражает, что его соседка Маргарита Леонидовна громко смотрит телевизор в шесть утра, и он решил сломать её телевизионную антенну, бросив в неё снежок. Антенна представляет собой вертикальный штырь и закреплена на выступе дома у окна соседки. Выступ расположен на высоте $h_1 = 3{,}5$ м от поверхности земли, а верхняя точка антенны — на высоте $h_2 = 4{,}8$ м. Теодор встал напротив антенны на расстоянии 4 м от основания дома и начал кидать снежки с высоты $H = 1{,}8$ м выше земли. Потренировав точность броска, он понял, что сможет попасть в антенну, и задался вопросом, может ли он попасть в любую её часть по высоте. В какую часть антенны (в процентах) Теодор мог бы попасть, если максимальная скорость, с которой он умеет кидать снежки, $v_0 = 8$ м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение.

Пусть начало координат — точка броска. Ось Ox направлена параллельно земле от Теодора к дому. Ось Oy направлена вертикально вверх перпендикулярно земле. Тогда движение снежка по оси Ox будет равномерным, по оси Oy — равноускоренным с ускорением свободного падения g, направленным против оси Oy. Тогда зависимость координат снежка от времени имеет вид

$$x = v_0 \cos \alpha t,$$
$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Выразим из уравнения для координаты x время:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

и подставим в уравнение для координаты y, тогда

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Пусть $\operatorname{tg} \alpha = \xi$, тогда

$$y(\xi) = x\xi - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\xi^2.$$

Получившаяся функция $y(\xi)$ — парабола, ветви которой направлены вниз: $y = a\xi^2 + b\xi + c$. Вершина параболы находится в точке

$$\xi_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Значит, при таком значении ξ высота антенны, до которой может долететь снежок, будет максимальной:

$$y_{max} = y\left(\xi_0\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{v_0^4}{g^2x^2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Подставив численные значения, получим $y_{max} \approx 2{,}05$ м. Нижняя точка антенны имеет координату $y_1 = 3{,}5 - 1{,}8 = 1{,}7$ м, верхняя — $y_2 = 4{,}8 - 1{,}8 = 3$ м.

$y_1 < y_{max}$, в нижнюю границу антенны попасть можно, $y_2 > y_{max}$, в верхнюю границу антенны попасть нельзя. Таким образом, доля антенны, в которую можно попасть,

$$\frac{y_{max} - y_1}{y_2 - y_1} \approx 0{,}269.$$

Ответ: 0,269.

2. Как-то раз в зимние каникулы, устав от громкого телевизора соседки, отец семейства решил провести время со своими детьми, Теодором и Лизой, на природе. Найдя приятную полянку в лесу, они с сыном Теодором установили палатку. Теодор заметил, что палатка имеет форму полусферы радиуса $R = 4$ м, а коэффициент теплоотдачи стенок палатки, указанный в инструкции, равен $U = 3$ Вт/ (м$^2 \cdot$ К).

   В это время дочь Лиза занялась установкой газового обогревателя. Внимательно прочитав инструкцию, Лиза обнаружила, что при использовании газового обогревателя требуется хорошая вентиляция помещения. Помимо вредных веществ, при сжигании одной единицы массы газа выделяется $D = 2{,}25$ единиц массы воды. Удельная теплота сгорания газа $k = 40$ МДж/кг. Однако оказалась затёртой мощность обогревателя.

   После того как все работы были закончены, в палатке установилась температура $T_1 = 15°$ С и влажность $\eta_1 = 80\%$; в то время как снаружи температура воздуха составляла $T_0 = -10°$ С, а влажность $\eta_0 = 50\%$. Лиза и Теодор поделились своими наблюдениями друг с другом и решили вместе разгадать тайну затёртой мощности. Для этого они воспользовались следующими справочными данными:

   Плотность воздуха $\rho_в = 1{,}2$ кг/м^3, его теплоёмкость $c_в = 1{,}0$ кДж/ (кг $\cdot$ К). При температуре $-10°$ С максимум $G_0 = 2{,}3$ г/м^3 водяного пара может поместиться в единицу объема воздуха, а при температуре $15°$ С — $G_1 = 12{,}8$ г/м^3 соответственно.

   Помогите Лизе и Теодору найти мощность газового обогревателя P и объём воздуха для вентиляции палатки Q в единицу времени. Считайте, что потерь тепла через пол палатки нет.

   Решение.

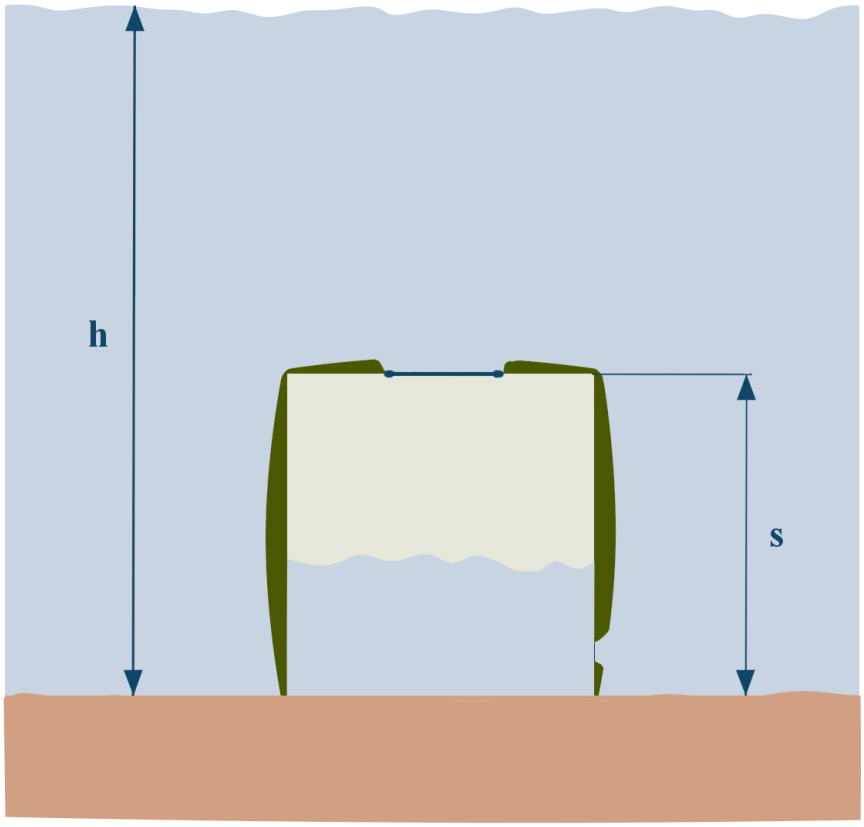
   Решение приведено на странице 33.

   Ответ: 9,26 кВт и 206 м^3/ч.

3. После просмотра документального фильма про знаменитого фокусника Теодору приснился сон. Во сне Теодор оказался заперт в капсуле глубоко под водой и, более того, прикован к стене этой капсулы. На потолке капсулы находился люк. Едва Теодор осмотрелся, с потолка капсулы ему в руку упала отмычка, а в стене напротив открылось отверстие, через которое капсула начала наполняться водой. К тому времени как Теодор освободился от оков, вода перестала подниматься, и он смог выбраться из капсулы, от-

крыв потолочный люк. В момент, когда он сделал первый вдох на поверхности какого-то водоёма, Теодор проснулся. Из-за громких звуков телевизора Маргариты Леонидовны заснуть у него больше не получилось, Теодор подумал, что происходящее во сне вполне соответствовало законам физики, так что он решил оценить, какой силой обладал во сне.

Первоначальное давление в капсуле он принял равным давлению воздуха на поверхность водоёма $p_0 = 100$ кПа, высоту капсулы равной $s = 2$ м, глубину водоёма — $h = 27$ м, площадь люка — $S = 0{,}50$ м^2. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Теодор не запомнил, в какую сторону открывался люк. Посчитайте силу, которую необходимо приложить Теодору, чтобы открыть люк, в обоих случаях.



Решение.

К моменту установления определённого уровня воды система находится в гидростати-

ческом равновесии. Запишем равенство давлений

$$\rho g(h - s + d) + p_0 = p_0 \frac{s}{d};$$

Заметим, что в случае если люк открывается наружу, Теодору нет необходимости прикладывать дополнительную силу. Далее рассматриваем случай люка, открывающегося вовнутрь. Из равенства давлений найдём толщину воздушного слоя d:

$$d^2 \rho g + d\left(p_0 + (h - s)\rho g\right) - s p_0 = 0;$$

$$d = \frac{\left(\pm\sqrt{\left(p_0 + (h - s)\rho g\right)^2 + 4 s \rho g p_0} - p_0 - (h - s)\rho g\right)}{2\rho g}.$$

Физический смысл имеет положительный корень $d \approx 57$ см. Заметив, что на люк снизу действует давление воздуха внутри капсулы, соответствующее гидростатическому давлению на глубине $d + h - s$, получаем выражение для сил, действующих на люк:

$$F = S(\rho g(d + h - s) + p_0 - \rho g(h - s) - p_0) = S\rho g d \approx 2800 \text{ Н}.$$

Заметим, что в случае отсутствия отверстия в капсуле, сила, которую необходимо было бы приложить, равнялась бы $S\rho g(h - s) \approx 120$ кН, что уже никак не умещается в рамки человеческих возможностей.

Ответ: Если люк открывается наружу — 0 Н, если люк открывается вовнутрь — 2800 Н.

4. Дед Лизы и Теодора очень любит разгадывать кроссворды. Чтобы чётко разглядеть свой любимый кроссворд на расстоянии $s_1 = 25$ см от хрусталика глаза, деду нужны очки с фокусным расстоянием $F_1 = 50$ см. Очки находятся на расстоянии $s_2 = 2$ см от его глаза, который сам имеет фокусное расстояние $F_0 = 2$ см. Дед решил сменить очки на контактные линзы. Какое фокусное расстояние должны иметь контактные линзы, которые находятся в прямом контакте с глазом, чтобы дед всё ещё мог видеть кроссворд чётко без изменения фокусного расстояния линзы глаза? Считайте все линзы тонкими.

Решение.

Кроссворд находится на расстоянии $d_1 = s_1 - s_2$ от очков. Это меньше, чем F_1, значит, изображение будет находиться на той же стороне хрусталика, что и кроссворд (линза

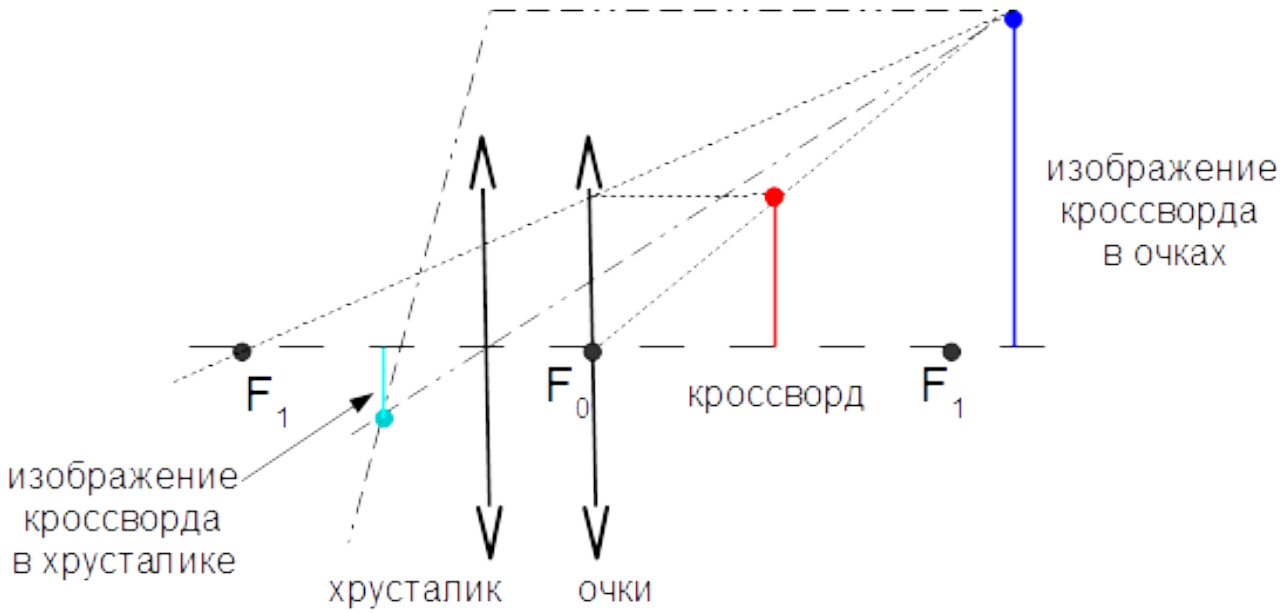


Рис. 11: Построение изображения кроссворда в очках и хрусталике глаза

собирающая, $d_1 < F_1$, следовательно, изображение мнимое). Положение изображения относительно очков получается из уравнения тонкой линзы:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1},$$

где f_1 — расстояние от изображения кроссворда в очках до самих очков:

$$f_1 = \left(\frac{1}{s_1 - s_2} - \frac{1}{F_1}\right)^{-1} = \frac{F_1(s_1 - s_2)}{F_1 - s_1 + s_2} = \frac{1150}{27} \text{ см}.$$

Тогда изображение кроссворда в очках находится на расстоянии $d_0 = f_1 + s_2 = 1204/27$ см от хрусталика глаза. Запишем уравнение тонкой линзы для хрусталика (линза собирающая, $d_0 > F_0$, изображение действительное):

$$\frac{1}{F_0} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0},$$

где f_0 — расстояние от изображения кроссворда в хрусталике до хрусталика.

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{F_0} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{2} - \frac{27}{1204} = \frac{575}{1204} \text{ см}^{-1};$$
$$f_0 = \frac{1204}{575} \text{ см}.$$

Раз в этом случае кроссворд виден чётко, его изображение попало на сетчатку глаза. Чтобы кроссворд был виден чётко и в контактных линзах, его изображение должно находиться там же. Можно считать, что контактная линза находится на очень малом расстоянии от хрусталика глаза, тогда оптическая сила системы контактная линза – хрусталик равна

$$\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2},$$

где F_2 — оптическая сила контактной линзы. Запишем для такой системы формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_0};$$

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_0} - \frac{1}{F_0} = \frac{1}{25} + \frac{575}{1204} - \frac{1}{2} = \frac{1204 + 575 \cdot 25 - 602 \cdot 25}{1204 \cdot 25} = \frac{529}{30100}\ \text{см}^{-1};$$

$$F_2 = \frac{30100}{529} \approx 56{,}9\ \text{см}.$$

Ответ: 56,9 см.

5. Отец Лизы и Теодора работал на исследовательском корабле в Арктике. В одну из экспедиций ему довелось высадиться на большую плоскую льдину, температура которой была $0^\circ C$. По стечению обстоятельств отцу нужно было вырыть лунку объёма $V_0 = 1000$ см^3. Затем эту лунку накрыли теплоизолирующей пластинкой, в которой вырезали небольшое отверстие. Далее в отверстие начали заливать стоградусный кипяток. Какую массу кипятка удалось залить в лунку? *Плотность воды* $\rho_0 = 1000$ *кг/м*^{3}*, её теплоёмкость* — $c_0 = 4{,}2$ *кДж/ (кг* $\cdot^\circ$ *C). Плотность льда* — $\rho_л = 900$ *кг/м*^{3}*, удельная теплота плавления льда* — $\lambda = 334$ *кДж/кг.*

Решение.

При заполнении лунки расплавится объём льда V_x, из которого образуется вода объёмом

$$V_в = V_x \frac{\rho_л}{\rho_0}.$$

Таким образом, объём лунки увеличится на

$$\Delta V = V_x - V_в = V_x \left(\frac{\rho_0 - \rho_л}{\rho_0} \right).$$

Тепло кипятка пойдет на плавление льда V_x. Получим уравнение теплового баланса, где слева стоит тепло потраченное на плавление льда, а справа — тепло, которое отдал кипяток:

$$V_x \rho_л \lambda = (V_0 + \Delta V)\rho_0 c_0 \Delta t.$$

Отсюда выразим V_x:

$$V_x = \frac{V_0 \rho_0 c_0 \Delta t}{\rho_л \lambda - (\rho_0 - \rho_л) c_0 \Delta t}.$$

Искомая масса кипятка:

$$m = (V_0 + \Delta V)\rho_0 = \frac{\rho_0 \rho_л V_0 \lambda}{\rho_л \lambda - (\rho_0 - \rho_л) c_0 \Delta t} = 1162 \text{ г.}$$

Ответ: $m = 1162$ г.

6. Имеется электроплитка с двумя нагревательными элементами — медными спиралями. При включении в сеть одной из спиралей максимальная температура плитки достигает $t_1 = 210^\circ C$, при включении другой — плитка разогревается до $t_2 = 190^\circ C$. Определите, при каком подключении спиралей, последовательном или параллельном, максимальная температура плитки будет выше и на сколько. Считать, что сопротивление материалов не зависит от температуры, а также, что поток тепла (количество тепла в единицу времени) от плитки пропорционален разности температур среды и плитки. Температура воздуха не меняется и равна $t_0 = 10^\circ C$.

Решение.

Запишем уравнения теплового баланса с использованием закона Джоуля–Ленца (в терминах мощности) и потока тепла от плитки для всех четырёх случаев: первая спираль, вторая спираль, последовательное соединение, параллельное:

$$\frac{U^2}{R_1} = a(t_1 - t_0),$$
$$\frac{U^2}{R_2} = a(t_2 - t_0),$$
$$\frac{U^2}{R_1 + R_2} = a(t_3 - t_0),$$
$$\frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = a(t_4 - t_0),$$

где a — коэффициент пропорциональности между потоком тепла от плитки и разностью температур плитки и среды.

Из отношения первых двух уравнений

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} =: k = 0{,}9.$$

Из отношения второго и третьего

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{t_2 - t_0}{t_3 - t_0} \implies t_3 = \frac{t_2 + kt_0}{k+1} \approx 105^\circ\, C.$$

Из отношения четвёртого и второго

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{t_4 - t_0}{t_2 - t_0} \implies t_4 = \frac{(k+1)t_2 - t_0}{k} = 390^\circ\, C.$$

Тогда $t_4 - t_3 \approx 285^\circ\, C$.

Ответ: при параллельном соединении температура будет больше на $285^\circ\, C$.

8 Младшая высшая лига. Бой за 3 место

1. Теодора раздражает, что его соседка Маргарита Леонидовна громко смотрит телевизор в шесть утра, и он решил сломать её телевизионную антенну, бросив в неё снежок. Антенна представляет собой вертикальный штырь и закреплена на выступе дома у окна соседки. Выступ расположен на высоте $h_1 = 3{,}5$ м от поверхности земли, а верхняя точка антенны — на высоте $h_2 = 4{,}8$ м. Теодор встал напротив антенны на расстоянии 4 м от основания дома и начал кидать снежки с высоты $H = 1{,}8$ м выше земли. Потренировав точность броска, он понял, что сможет попасть в антенну, и задался вопросом, может ли он попасть в любую её часть по высоте. В какую часть антенны (в процентах) Теодор мог бы попасть, если максимальная скорость, с которой он умеет кидать снежки, $v_0 = 8$ м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

   Решение.

   Решение задачи приведено на странице 55.

   Ответ: 0,269.

2. На пути пятиклассницы Сони из школы домой стоял неумолимо привлекающий внимание колодец. Однажды любопытство Сони победило и она решила определить глубину колодца. Бросив в него камень, она измерила время, которое прошло от броска до всплеска, и произвела расчёты. От радости Соня прокричала полученный результат вслух. В ответ ей раздался насмешливый голос её соседа Теодора, по всей видимости, наблюдавшего за этой картиной. Теодор сообщил Соне, что та забыла учесть в расчётах скорость звука и ошиблась на 5%. Какова же была глубина манящего колодца?
   Скорость звука $v_{\text{зв}} = 330$ м/с, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с.

   Решение.

   Глубина колодца
   $$d = \frac{1}{2}gt^2,$$
   где t — время падения камня. $\Delta t = d/v_{\text{зв}}$ — время, за которое звук всплеска достигнет Соню со дна колодца. Если в расчётах использовать время $t + \Delta t$ вместо t,
   $$d + \Delta d = \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2,$$

$$\Delta d = d + \Delta d - d = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

Выразим величину ошибки n:

$$n = \frac{\Delta d}{d} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{d},$$

подставляя $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ и $\Delta t = \frac{d}{v_{\text{зв}}}$, имеем квадратное уравнение на $\sqrt{d}$:

$$d + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{g}}v_{\text{зв}}\sqrt{d} - \frac{2nv_{\text{зв}}^2}{g} = 0,$$

решая которое, получаем

$$\sqrt{d} = \sqrt{\frac{2}{g}}v_{\text{зв}}(-1 \pm \sqrt{1+n}).$$

Оставляем положительный корень

$$d = \frac{2}{g}v_{\text{зв}}^2(-1+\sqrt{1+n})^2 = 13{,}554 \text{ м}.$$

Ответ: 13,554 м.

3. Недовольный работой своего старого чайника, Давид купил себе новый. В заводских данных написано, что чайник потребляет мощность $P = 2$ кВт и работает от сети постоянного тока с напряжением $U = 220$ В. Опытным путём Давид установил, что если чайник полностью заполнить водой, то она закипит за время $t = 2{,}5$ минуты. Оцените на сколько градусов нагрелись подводящие ток провода в шнуре питания чайника, если известен диаметр проводов $d = 1{,}5$ мм. Провода сделаны из меди, удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}0175$ Ом·мм^2/м, плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8920$ кг/м^3, удельная теплоёмкость меди $c = 400$ Дж/($^\circ C$·кг). Тепловыми потерями в проводах пренебречь.

Решение.

Для начала рассчитаем силу тока, текущего через чайник:

$$P = UI \Rightarrow I = \frac{P}{U}.$$

Вычислим сопротивление проводов:

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2},$$

где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения проводников. Рассчитаем количество теплоты, выделяемое на нагрев проводов, по закону Джоуля–Ленца:

$$Q = I^2 Rt = \frac{4P^2 \rho l t}{\pi U^2 d^2}.$$

Выделившееся в проводах тепло расходуется на их нагрев:

$$Q = mc\Delta T = \rho_{\text{м}} V c \Delta T = \rho_{\text{м}} S l c \Delta T = \rho_{\text{м}} \pi \frac{d^2}{4} l c \Delta T,$$

где $V = Sl$ — объём проводов, $m = \rho_{\text{м}} V$ — их масса, ΔT — их нагрев. Приравнивая два последних выражения, получаем:

$$\frac{4P^2 \rho l t}{\pi U^2 d^2} = \rho_{\text{м}} \pi \frac{d^2}{4} l c \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{16 P^2 \rho t}{\pi^2 U^2 d^4 \rho_{\text{м}} c} = 19{,}5 \cdot 10^{-6}\ {}^\circ C.$$

Ответ: $\Delta T = 19{,}5 \cdot 10^{-6}\ {}^\circ C$.

4. Дед Лизы и Теодора очень любит разгадывать кроссворды. Чтобы чётко разглядеть свой любимый кроссворд на расстоянии $s_1 = 25$ см от хрусталика глаза, деду нужны очки с фокусным расстоянием $F_1 = 50$ см. Очки находятся на расстоянии $s_2 = 2$ см от его глаза, который сам имеет фокусное расстояние $F_0 = 2$ см. Дед решил сменить очки на контактные линзы. Какое фокусное расстояние должны иметь контактные линзы, которые находятся в прямом контакте с глазом, чтобы дед всё ещё мог видеть кроссворд чётко без изменения фокусного расстояния линзы глаза? Считайте все линзы тонкими.

Решение.

Решение задачи приведено на странице 58.

Ответ: 56,9 см.

5. Отец Лизы и Теодора работал на исследовательском корабле в Арктике. В одну из экспедиций ему довелось высадиться на большую плоскую льдину, температура которой была $0^\circ C$. По стечению обстоятельств отцу нужно было вырыть лунку объёма $V_0 = 1000$ см^3. Затем эту лунку накрыли теплоизолирующей пластинкой, в которой вырезали небольшое отверстие. Далее в отверстие начали заливать стоградусный кипяток.

Какую массу кипятка удалось залить в лунку? *Плотность воды* $\rho_0 = 1000$ *кг/м*^{3}, *её теплоёмкость* — $c_0 = 4{,}2$ *кДж/(кг* $\cdot^\circ C$). *Плотность льда* — $\rho_л = 900$ *кг/м*^{3}, *удельная теплота плавления льда* — $\lambda = 334$ *кДж/кг.*

Решение.

Решение задачи приведено на странице 60.

Ответ: $m = 1162$ г.

6. Имеется электроплитка с двумя нагревательными элементами — медными спиралями. При включении в сеть одной из спиралей максимальная температура плитки достигает $t_1 = 210^\circ C$, при включении другой — плитка разогревается до $t_2 = 190^\circ C$. Определите, при каком подключении спиралей, последовательном или параллельном, максимальная температура плитки будет выше и на сколько. Считать, что сопротивление материалов не зависит от температуры, а также, что поток тепла (количество тепла в единицу времени) от плитки пропорционален разности температур среды и плитки. Температура воздуха не меняется и равна $t_0 = 10^\circ C$.

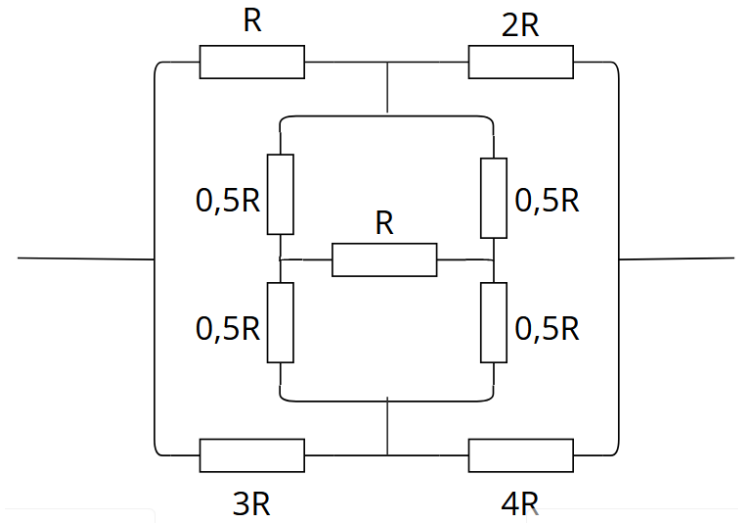
Решение.

Решение задачи приведено на странице 61.

Ответ: при параллельном соединении температура будет больше на $285^\circ C$.

9 Старшая первая лига

1. Найдите сопротивление цепи, представленной на рисунке ниже.



Решение.

Решение задачи приведено на странице 52.

Ответ: $R^* = \dfrac{125}{58}R$.

2. Теодора раздражает, что его соседка Маргарита Леонидовна громко смотрит телевизор в шесть утра, и он решил сломать её телевизионную антенну, бросив в неё снежок. Антенна представляет собой вертикальный штырь и закреплена на выступе дома у окна соседки. Выступ расположен на высоте $h_1 = 3{,}5$ м от поверхности земли, а верхняя точка антенны — на высоте $h_2 = 4{,}8$ м. Теодор встал напротив антенны на расстоянии 4 м от основания дома и начал кидать снежки с высоты $H = 1{,}8$ м выше земли. Потренировав точность броска, он понял, что сможет попасть в антенну, и задался вопросом, может ли он попасть в любую её часть по высоте. В какую часть антенны (в процентах) Теодор мог бы попасть, если максимальная скорость, с которой он умеет кидать снежки, $v_0 = 8$ м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Решение задачи приведено на странице 55.

Ответ: 0,269.

3. Как-то в ветреную погоду Лиза напросилась пойти с дедом на метеостанцию, где тот каждый день снимает показания приборов. Для того чтобы измерить скорость ветра, там используется ультразвуковой анемометр. Дед показал Лизе, как устроен прибор: в его центре $O = (0; 0)$ расположен источник звука, а в трёх точках с координатами $A = (0; a)$, $B = (a; 0)$ и $C = (-a; 0)$, где $a = 211{,}1$ мм, расположены датчики. Анемометр располагают так, чтобы все датчики и источник звука лежали в одной горизонтальной плоскости, и измеряют время, за которое звук от источника дойдёт до каждого из датчиков. У Лизы получились следующие значения: $t_A = 627{,}0$ мкс, $t_B = 625{,}2$ мкс и $t_C = 603{,}4$ мкс. Какова была скорость ветра в тот день? Считать размеры датчиков и источника пренебрежимо малыми.

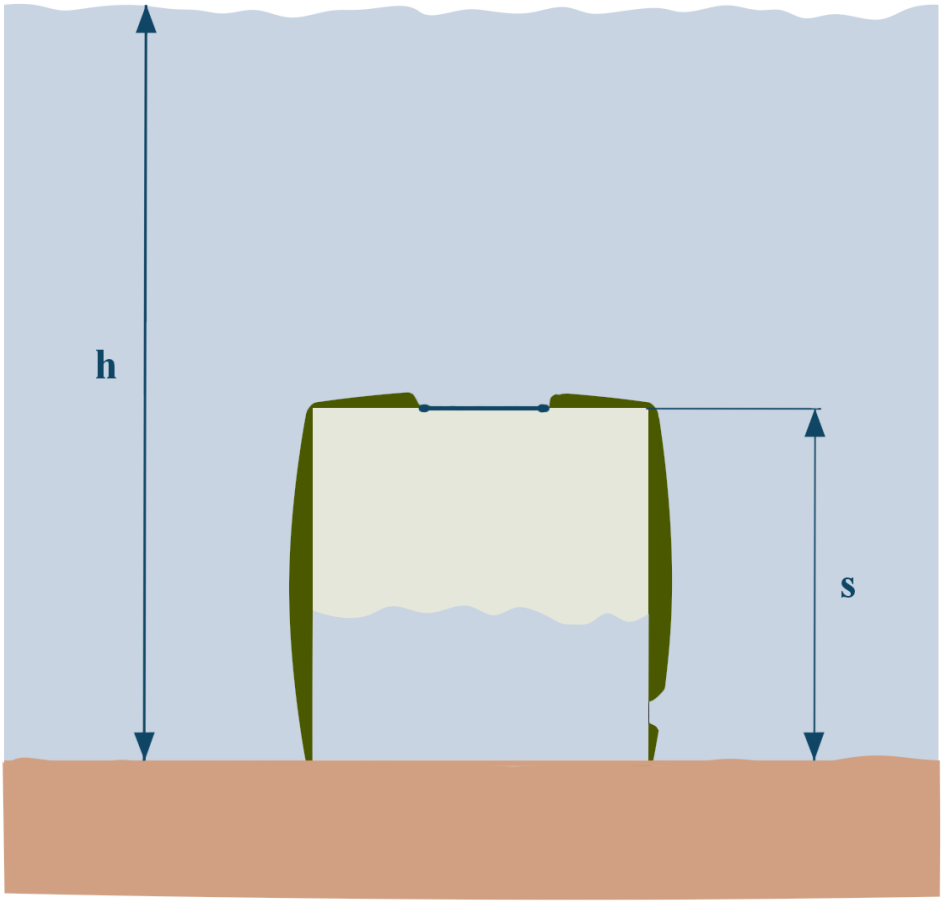
Решение.

Решение задачи приведено на странице 47.

Ответ: $\approx 9{,}4$ м/с.

4. После просмотра документального фильма про знаменитого фокусника Теодору приснился сон. Во сне Теодор оказался заперт в капсуле глубоко под водой и, более того, прикован к стене этой капсулы. На потолке капсулы находился люк. Едва Теодор осмотрелся, с потолка капсулы ему в руку упала отмычка, а в стене напротив открылось отверстие, через которое капсула начала наполняться водой. К тому времени как Теодор освободился от оков, вода перестала подниматься, и он смог выбраться из капсулы, открыв потолочный люк. В момент, когда он сделал первый вдох на поверхности какого-то водоёма, Теодор проснулся. Из-за громких звуков телевизора Маргариты Леонидовны заснуть у него больше не получилось, Теодор подумал, что происходящее во сне вполне соответствовало законам физики, так что он решил оценить, какой силой обладал во сне.

Первоначальное давление в капсуле он принял равным давлению воздуха на поверхность водоёма $p_0 = 100$ кПа, высоту капсулы равной $s = 2$ м, глубину водоёма — $h = 27$ м, площадь люка — $S = 0{,}50$ м^2. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Теодор не запомнил, в какую сторону открывался люк. Посчитайте силу, которую необходимо приложить Теодору, чтобы открыть люк, в обоих случаях.

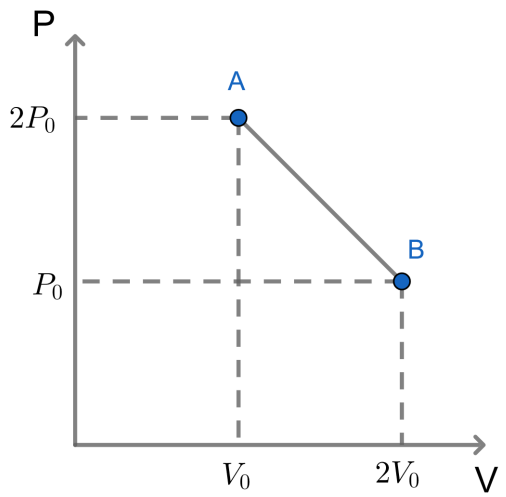


Решение.

Решение задачи приведено на странице 57.

Ответ: 2800 Н.

5. Известно, что n моль идеального газа участвуют в процессе AB, указанном на рисунке. Найдите максимальную температуру, которую достигает газ в этом процессе.



Решение.

Решение задачи приведено на странице 46.

Ответ: $T^* = \dfrac{9}{4nR}P_0V_0$.

6. Дед Лизы и Теодора очень любит разгадывать кроссворды. Чтобы чётко разглядеть свой любимый кроссворд на расстоянии $s_1 = 25$ см от хрусталика глаза, деду нужны очки с фокусным расстоянием $F_1 = 50$ см. Очки находятся на расстоянии $s_2 = 2$ см от его глаза, который сам имеет фокусное расстояние $F_0 = 2$ см. Дед решил сменить очки на контактные линзы. Какое фокусное расстояние должны иметь контактные линзы, которые находятся в прямом контакте с глазом, чтобы дед всё ещё мог видеть кроссворд чётко без изменения фокусного расстояния линзы глаза? Считайте все линзы тонкими.

Решение.

Решение задачи приведено на странице 58.

Ответ: 56,9 см.

10 Младшая первая лига

1. Недовольный работой своего старого чайника, Давид купил себе новый. В заводских данных написано, что чайник потребляет мощность $P = 2$ кВт и работает от сети постоянного тока с напряжением $U = 220$ В. Опытным путём Давид установил, что если чайник полностью заполнить водой, то она закипит за время $t = 2{,}5$ минуты. Оцените на сколько градусов нагрелись подводящие ток провода в шнуре питания чайника, если известен диаметр проводов $d = 1{,}5$ мм. Провода сделаны из меди, удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}0175$ Ом·мм^2/м, плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8920$ кг/м^3, удельная теплоёмкость меди $c = 400$ Дж/(°C·кг). Тепловыми потерями в проводах пренебречь.

   Решение.

   Решение задачи приведено на странице 64.

   Ответ: $\Delta T = 19{,}5 \cdot 10^{-6}\ ^\circ C$.

2. Лиза и Теодор хотят определить фокусное расстояние тонкой собирающей линзы. Для этого они соорудили установку, состоящую из экрана и точечного источника света, закреплённого на расстоянии $L = 90$ см от экрана. Затем Лиза и Теодор начали по очереди получать чёткое изображение источника на экране, помещая линзу между ним и источником. Однако Лиза получила чёткое изображение линзы при одном расстоянии от линзы до экрана, а Теодор — при другом. Определите фокусное расстояние линзы, если разность расстояний, полученных Лизой и Теодором, равна $l = 30$ см.

   Решение.

   Пусть f — расстояние от линзы до экрана, полученное Лизой, а $f - l$ — Теодором. Тогда расстояния от линзы до источника будут соответственно равны $L - f$ и $L - f + l$. Запишем уравнение тонкой линзы для этих двух случаев:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{L-f} = \frac{L}{f(L-f)},$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f-l} + \frac{1}{L-f+l} = \frac{L}{(f-l)(L-f+l)}.$$

Решая эту систему уравнений относительно f и F, получаем ответ $F = 20$ см.

Ответ: $F = 20$ см.

3. Не многие знают, но на самом деле воду можно охладить до температуры $t = -10°C$, при этом она останется жидкой! Такое состояние воды неустойчиво, при любом возмущении вода превращается в лёд температуры $t_0 = 0°C$. Бутылку встряхнули, вызвав процесс кристаллизации, найдите отношение $\dfrac{V_л}{V_в}$, где $V_л$ — объём образовавшегося льда, $V_в$ — объём воды в бутылке, оставшейся жидкой. Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·$°C$), льда — $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·$°C$). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг.

Решение.

В данном процессе тепло, образующееся при кристаллизации воды, расходуется на её нагрев до 0 градусов Цельсия. Запишем уравнение теплового баланса:

$$\lambda m_л = \lambda \rho_л V_л = (c_л m_л + c_в m_в)\Delta T = (c_л \rho_л V_л + c_в \rho_в V_в)\Delta T,$$

где $\rho_л$, $\rho_в$ — плотности льда и воды, $V_л$, $V_в$ — их объёмы, а $m = \rho_л V_л$ и $m_в = \rho_в V_в$ — их массы, $\Delta T = 10°\,C$ — изменение температуры воды в данном процессе. Из уравнения теплового баланса получаем искомое отношение:

$$\frac{V_л}{V_в} = \frac{c_в \rho_в \Delta T}{\rho_л(\lambda - c_л \Delta T)} = 0{,}15.$$

Ответ: $\dfrac{V_л}{V_в} = 0{,}15$.

4. Тело движется на плоскости так, что его координаты зависят от времени следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 3t, \\ y(t) = 125 + 29t - 5t^2. \end{cases}$$

Чему равняется модуль средней скорости тела за первые $t = 5$ секунд движения? Все величины здесь даны в СИ.

Решение.

Запишем формулу для модуля средней скорости:

$$v = \frac{S}{t},$$

где S — модуль перемещения. Найдём положения тела в моменты времени 0 секунд и 5 секунд:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \text{ м}, \\ y(0) = 125 \text{ м}, \\ x(5) = 16 \text{ м}, \\ y(5) = 145 \text{ м}. \end{cases}$$

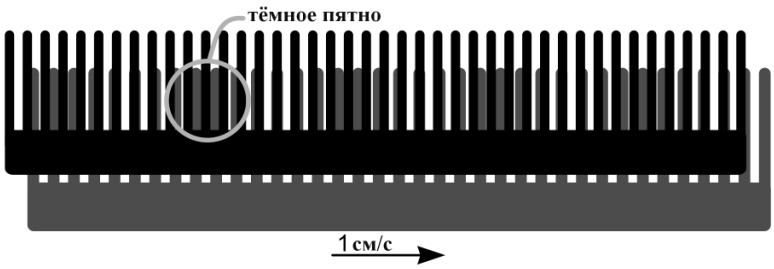
Тогда по теореме Пифагора модуль перемещения равен:

$$S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ м}.$$

Тогда модуль средней скорости равен $v = \dfrac{S}{t} = 5$ м/с.

Ответ: $v = 5$ м/с.

5. Два гребня расположены друг за другом, как указано на рисунке. Серый гребень движется со скоростью $v = 1$ см/с, чёрный остаётся неподвижным. С какой скоростью движутся тёмные пятна?



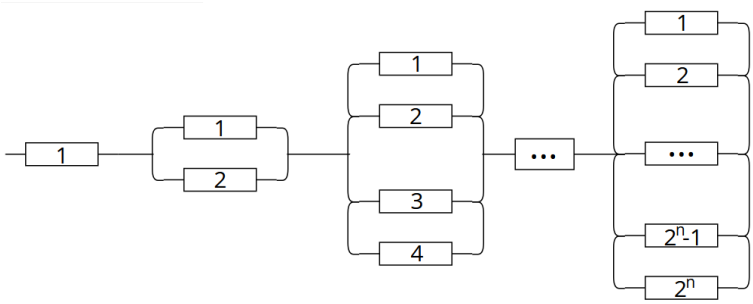
Решение.

При перемещении серого гребня ровно на один зубец тёмное пятно вернётся в первоначальный вид, следовательно, тёмное пятно сместилось на одну «длину волны». На одну

«длину волны» пятен приходится 7 «длин волн» зубцов серого гребня, поэтому темные пятна движутся в 7 раз быстрее серого гребня: $v = 7$ см/с.

Ответ: 7 см/с.

6. Посчитайте сопротивление цепи, указанной на рисунке. Элементами этой цепи являются группы параллельно соединённых резисторов: сначала 1, потом 2, потом 4, потом 8 и так далее вплоть до 2^n штук. Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны R.



Решение.

Для параллельного соединения k одинаковых резисторов сопротивление легко посчитать: $R_k = \dfrac{R}{k}$. Тогда сопротивление исходной цепи есть ни что иное, как сумма первых n членов геометрической прогрессии с начальным элементом R и знаменателем $\dfrac{1}{2}$:

$$R(n) = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \ldots + \frac{R}{2^n} = \frac{R(1-0{,}5^n)}{1-0{,}5} = 2R\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Ответ: $R(n) = 2R\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.